

NGUYỄN TẤT THU



GIẢI TOÁN THEO CHUYÊN ĐỀ TRỌNG ĐIỂM HÌNH HỌC

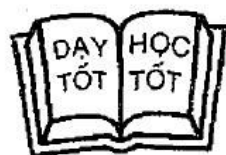
- ✓ 14 chuyên đề trọng điểm.
- ✓ Các phương pháp giải và thí dụ.
- ✓ Đầy đủ các dạng bài tập cơ bản & nâng cao.
- ✓ Nâng cao kỹ năng giải toán và ôn thi vào ĐH-CĐ.

12

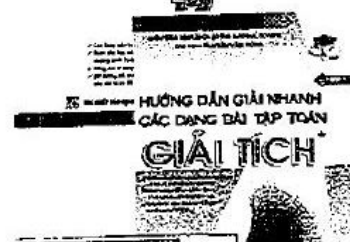
MỚI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



Đã phát hành:



NGUYỄN TẤT THU

GIẢI TOÁN THEO CHUYÊN ĐỀ TRỌNG ĐIỂM HÌNH HỌC



- ✓ 47 chuyên đề trọng điểm.
- ✓ Các phương pháp giải và thí dụ.
- ✓ Đầy đủ các dạng bài tập cơ bản & nâng cao.
- ✓ Nâng cao kĩ năng giải toán và ôn thi vào ĐH-CĐ.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:**Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM .****Biên tập nội dung****NHƯ NGỌC****Sửa bài****LÊ THỊ SEN****Chế bản****CÔNG TI AN PHA VN****Trình bày bìa****SƠN KỲ****Đối tác liên kết xuất bản****CÔNG TI AN PHA VN****SÁCH LIÊN KẾT****GIẢI TOÁN THEO CHUYÊN ĐỀ TRỌNG ĐIỂM HÌNH HỌC 12****Mã số: IL-174ĐH2013****In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty TNHH in Bao bì Hưng Phú****Số xuất bản: 387-2013/CXB/11-54/ĐHQGHN, ngày 27/3/2013****Quyết định xuất bản số: 175LK-TN/QĐ-NXBDHQGHN****In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2013.**

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm giúp các em học sinh nắm vững kiến thức và phương pháp giải các dạng toán điển hình của chương trình hình học lớp 12 hiện hành, chúng tôi biên soạn cuốn sách: *"Giải toán theo chuyên đề trọng điểm Hình học 12"*

Cuốn sách được chia làm ba chương như sau:

Chương 1: Thể tích khối đa diện

Chương 2: Mặt tròn xoay - Mặt cầu

Chương 3: Phương pháp tọa độ trong không gian

Trong mỗi chương chúng tôi trình bày các chuyên đề trọng điểm, phương pháp giải các chuyên đề đó và các ví dụ minh họa cho phương pháp. Các ví dụ được sắp xếp theo mức độ từ dễ đến khó, các lời giải được trình bày rõ ràng, súc tích. Trong một số ví dụ, sau lời giải chúng tôi đưa ra một số nhận xét nhằm khắc sâu một tính chất quan trọng hoặc đưa ra một thuật giải cho bài toán tổng quát. Sau mỗi chuyên đề chúng tôi đưa ra một hệ thống các bài tập phong phú để giúp bạn đọc đánh giá lại các nội dung mà bản thân đã lĩnh hội được. Phần hướng dẫn giải hoặc đáp số được trình bày sau phần bài tập.

Mặc dù có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn, nhưng cuốn sách không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến xin liên hệ:

Trung tâm Sách giáo dục Alpha

225C Nguyễn Tri Phương, P9, Q5, Tp. HCM.

- Công ti TNHH An Pha VN

50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, Tp. HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cảm ơn!

Các tác giả

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]: 18 chủ đề Hình học 12 – Nguyễn Văn Dũng, Nguyễn Tất Thu, Nxb

[2]: Phương pháp giải các chuyên đề nâng cao Hình học 12, Trần Văn Tấn

[3]: Tài liệu chuyên toán Hình học 12, Đoàn Quỳnh (chủ biên)

[4]: Bài tập Hình học lớp 12

[5]: Các bài giảng luyện thi môn Toán, tập 1

[6]: Các tài liệu trên internet

[7]: Các diễn đàn về Toán học như:

<http://mathscope.org> ; <http://math.net.vn> ; <http://onluyentoan.vn> ;
<http://boxmath.com>

Chương 1. KHỐI ĐA DIỆN – THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Chuyên đề 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1.1. Phương pháp giải.

Để tính thể tích khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta thường đi theo hai cách sau:

Cách 1: Tính trực tiếp

Ta đi tính đường cao và diện tích đáy. Khi xác định chân đường cao của hình chóp cần chú ý:

- Hình chóp đều thì chân của đường cao là tâm của đáy.
- Hình chóp có mặt bên (SA_iA_k) vuông góc với mặt đáy thì chân đường cao của tam giác SA_iA_k hạ từ S là chân đường cao của hình chóp.
- Nếu có hai mặt phẳng đi qua đỉnh và cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy.
- Nếu các cạnh bên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Nếu các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

Cách 2: Tính gián tiếp

Khi tính thể tích theo cách gián tiếp, cần chú ý đến các tính chất sau:

- Nếu mặt phẳng (α) cắt các đường thẳng SA, SB, SC của hình chóp

$$S.ABC \text{ lần lượt tại } A', B', C' \text{ thì: } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC}$$

- Nếu hình (H) được phân chia thành hai hình (H_1) , (H_2) không có điểm chung trong thì $V_{H_1} = V_H - V_{H_2}$.

2.1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.1.1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Tính thể tích khối chóp biết

- 1) Cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$ và mặt bên tạo với đáy một góc 60°
- 2) Đường cao của hình chóp tạo với đáy một góc 45° và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $2a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO \perp (ABCD)$ suy ra:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}.$$

- 1) Gọi M là trung điểm CD, ta có: $CD \perp (SMO)$

Do đó góc $\widehat{SMO}$ là góc giữa mặt bên với mặt đáy, nên $\widehat{SMO} = 60^\circ$

Đặt $AB = 2x \Rightarrow MO = x, OC = x\sqrt{2}$

Trong các tam giác vuông SOC, SOM ta có:

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 5a^2 - 2x^2; SO = OM \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$$

Nên ta có phương trình: $5a^2 - 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} x\sqrt{3} \cdot (2x)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} x^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$

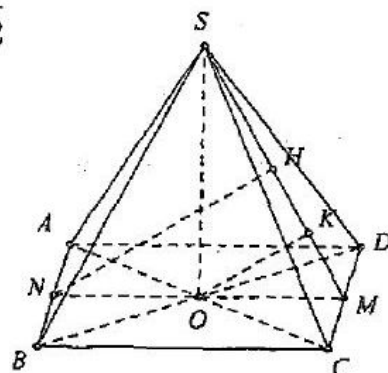
- 2) Gọi K là hình chiếu của O lên AM , ta có $OK \perp (SCD)$ nên $\widehat{OSK}$ là góc giữa đường cao SO với mặt bên nên $\widehat{OSK} = 45^\circ$. Gọi N là trung điểm AB . Do $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(N, (SCD)) = NH = 2a$

Trong đó $HN \parallel OK \Rightarrow OK = \frac{1}{2} NH = a$

Các tam giác SKO, SOM là các tam giác vuông cân nên ta có:

$$SO = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2}, OM = SO = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} (2a\sqrt{2})^2 = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}.$$



Chú ý: Bài toán tính thể tích của một khối chóp là tổ hợp của hai bài toán nhỏ là bài toán tính chiều cao của hình chóp và tính diện tích đáy.

- Để tính diện tích đáy, chúng ta cần nhớ công thức tính diện tích của các đa giác thường gặp.

+) Diện tích tam giác ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Đặc biệt: Tam giác ABC vuông tại A thì $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

$$\text{Tam giác ABC đều cạnh } a \text{ thì } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

+) Diện tích tứ giác ABCD

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin(\angle AC, BD)$$

Đặc biệt: ABCD có hai đường chéo vuông góc thì $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$) thì $S_{ABCD} = \frac{h(AB + CD)}{2}$.

• Để tính chiều cao của hình chóp, chúng ta cần nắm vững các hệ thức lượng trong tam giác và cách xác định góc giữa đường với mặt, giữa hai mặt phẳng.

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (SA_iA_j) với mặt đáy của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đường cao SH ta làm như sau:

+) Vẽ $HK \perp A_iA_j$, $K \in A_iA_j$

+) Ta có $A_iA_j \perp (SKH)$ nên $\widehat{SKH}$ là góc cần xác định.

Ví dụ 1.1.2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$, biết $(BMN) \perp (SAC)$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của $MN \Rightarrow AE \perp MN$.

Do đó $(AMN) \perp (SBC) \Leftrightarrow AE \perp SE$.

Đặt $SA = x, x > 0$.

Trong tam giác AMN có

$$\begin{aligned} AM = AN &= \sqrt{\frac{AS^2 + AB^2}{2} - \frac{SB^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + x^2} \text{ và } MN = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

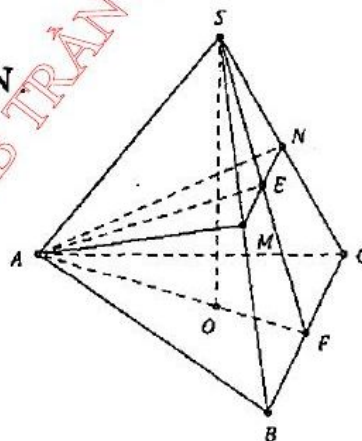
$$\text{Suy ra } AE^2 = AM^2 - ME^2 = \frac{2a^2 + x^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{7a^2 + 4x^2}{16}.$$

$$\text{Trong tam giác } SAE \text{ có } SE = \frac{1}{2} SF = \frac{1}{2} \sqrt{SB^2 - BF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{Suy ra } AE^2 = SA^2 - SE^2 = x^2 - \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{3x^2}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{7a^2 + 4x^2}{16} = \frac{3x^2}{4} + \frac{a^2}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$



Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$$

Ví dụ 1.1.3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH) . Tính thể tích khối chóp $(S.ABH)$.

(Trích đề thi ĐH Khối B - 2012)

Lời giải.

Gọi O là tâm tam giác đều, D là trung điểm AB ta có
 $SO \perp (ABC)$, $CD \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$ mà $SC \perp AH$ nên $SC \perp (ABH)$

Trong tam giác cân SAC có

$$\cos S = \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA \cdot SC} = \frac{4a^2 + 4a^2 - a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \frac{7}{8}$$

Trong tam giác vuông SAH có

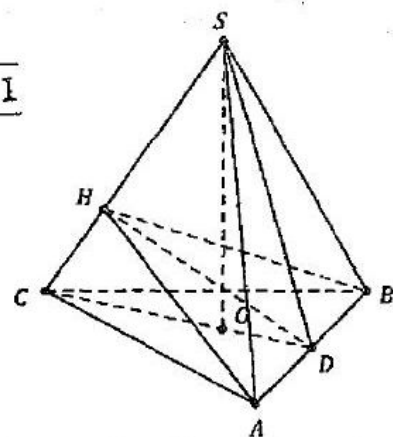
$$SH = SA \cos S = 2a \cdot \frac{7}{8} = \frac{7a}{4} \text{ và } AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Trong tam giác vuông ADH có:

$$DH = \sqrt{AH^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$$

Vậy thể tích khối chóp

$$\begin{aligned} V_{S.ABH} &= \frac{1}{3} S_{ABH} \cdot SH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DH \cdot SH = \frac{7\sqrt{11}}{96} a^3 \end{aligned}$$



Ví dụ 1.1.4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

(Đề thi ĐH Khối A - 2012)

Lời giải.

• Tính $V_{S.ABC}$: Vì $SH \perp (ABC)$ nên HC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó, ta có góc tạo bởi SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

Xét tam giác BHC . Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$\begin{aligned}
 HC^2 &= HB^2 + BC^2 - 2 \cdot HB \cdot BC \cdot \cos \widehat{HBC} \\
 &= HB^2 + BC^2 - 2 \cdot HB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \\
 &= \frac{a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}.
 \end{aligned}$$

Suy ra $HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Từ đây, ta tính được:

$$SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \right) = \frac{\sqrt{7}a^3}{12} \text{ (đvtt)}.$$

• Tính $d(SA, BC)$: Gọi E là trung điểm của BC và D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Ta có $AD \parallel BC$ nên

$$d(SA, BC) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = \frac{3}{2} \cdot d(H, (SAD)).$$

Kẻ $HF \perp AD$ và $HK \perp SF$, khi đó ta có $HK \perp (SAD)$.

Suy ra: $d(H, (SAD)) = HK$.

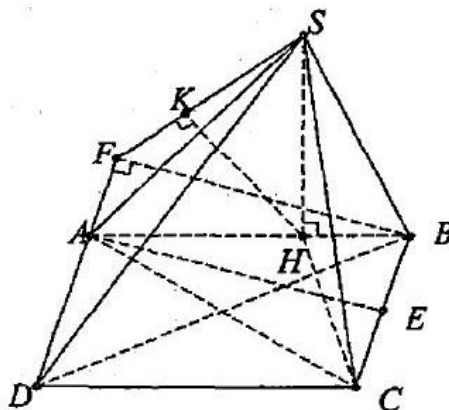
$$\text{Trong tam giác vuông } SHF, \text{ ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2}.$$

$$\text{Do đó: } HK = \frac{HF \cdot HS}{\sqrt{HS^2 + HF^2}}.$$

$$\text{Mặt khác, ta lại có: } HF = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

$$\text{Nên suy ra: } HK = \frac{HF \cdot HS}{\sqrt{HS^2 + HF^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{\frac{3}{9}a^2 + \frac{21}{9}a^2}} = \frac{\sqrt{42}}{12} a.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{42}}{12} a = \frac{\sqrt{42}}{8} a.$$



Chú ý: Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b ta có các cách sau:

Cách 1: Dụng đoạn vuông góc chung MN của a và b .

Khi đó $d(a, b) = MN$.

Chú ý: Nếu $a \perp b$ thì ta dụng đoạn vuông góc chung của a và b như sau

- Dụng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a .
- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$.
- Dụng $OH \perp b$.

Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 2: Dụng mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b , khi đó:

$d(a, b) = d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$ với M là điểm bất kì thuộc (α) .

Cách 3: Dụng hai mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b , (β) đi qua b và song song với a . Khi đó: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$.

Cách 4: Phương pháp véc tơ:

MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1.1.5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) .

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu của A lên BC , suy ra $BC \perp (SAK)$

Nên góc $\widehat{SKA}$ là góc giữa mặt (SBC)

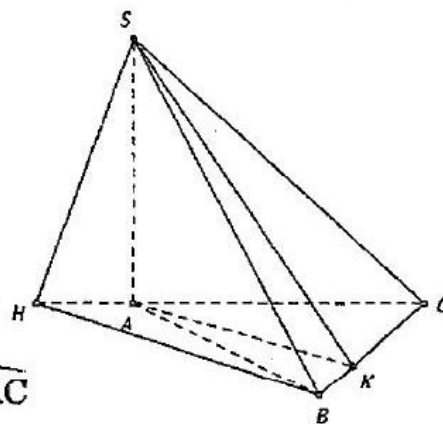
và mặt đáy, suy ra $\widehat{SKA} = 60^\circ$.

Trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2 \end{aligned}$$

Suy ra $BC = a\sqrt{7}$.

$$\text{Mặt khác: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$



$$\text{Mà: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC \Rightarrow AK = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Trong tam giác } SAK, \text{ ta có: } SA = AK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{7}}{7}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{21}}{4}.$$

Gọi H là hình chiếu của B lên AC . Khi đó hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAC) là tam giác SHC . Đặt $\varphi = \widehat{(SBC), (SAC)}$, ta có:

$$\cos \varphi = \frac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}}.$$

$$\text{Ta có: } AH = AB \cos \widehat{HAB} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow HC = 2a - \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta SHC} = \frac{1}{2} SA \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{5a}{2} = \frac{15a^2 \sqrt{7}}{28}.$$

Trong tam giác SAK , ta có:

$$SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{7} + \frac{3a^2}{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot a\sqrt{7} = a^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{5\sqrt{21}}{28}.$$

Ví dụ 1.1.6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = \sqrt{3}a$, $AC = 2a$. Canh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Tính thể tích của khối chóp $S.AHC$ biết AC tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 30° .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$, hay HC là hình chiếu của AC lên mặt phẳng (SBC)

$$\text{Suy ra } \widehat{ACH} = \widehat{(AC, (SBC))} = 30^\circ.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AHC, \text{ ta có: } AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 2a \cdot \sin 30^\circ = a$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có: $BC = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB $\Rightarrow HK \parallel SA \Rightarrow HK \perp (ABC)$

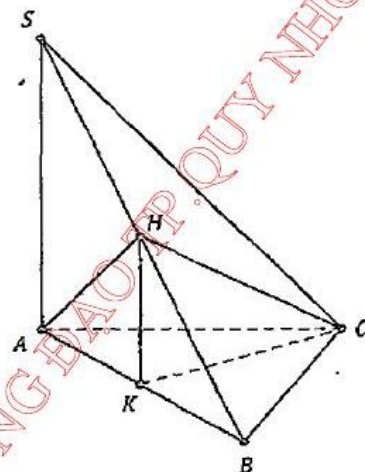
Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{HK}{SA} = \frac{BH}{BS} = \frac{AB^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + \frac{3}{2}a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{2}{3}SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } V_{H.ABC} &= \frac{1}{3}HK \cdot S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMC} = V_{S.ABC} - V_{H.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Ví dụ 1.1.7.

Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $AB = 5a$, $BC = 6a$, $CA = 7a$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Lời giải.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 9a$

Nên diện tích tam giác ABC là:

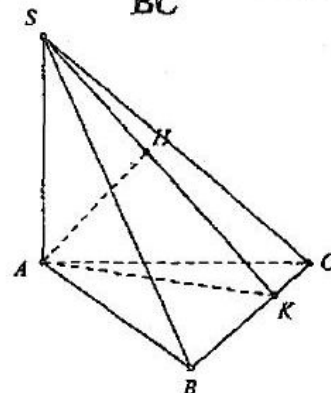
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{9a \cdot 4a \cdot 3a \cdot 2a} = 6a^2\sqrt{6}$$

Kẻ đường cao AK của tam giác ABC và đường cao AH của tam giác SAK

Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$, $AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = 2a\sqrt{6}$

Trong tam giác vuông SAK, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{SA^2} &= \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AK^2} = \frac{9}{24a^2} - \frac{1}{24a^2} = \frac{1}{3a^2} \\ \Rightarrow SA &= a\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 6a^2\sqrt{6} = 6a^3\sqrt{2}.$$

Chú ý: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đường cao SH . Để tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SA_iA_j) ta làm như sau:

+) Gọi K là hình chiếu của H lên A_iA_j suy ra $A_iA_j \perp (SHK)$

+) Gọi E là hình chiếu của H lên SK ta có $HE \perp (SA_iA_j)$. Tức là:

$$d(H, (SA_iA_j)) = HE.$$

Ví dụ 1.1.9. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Chứng minh tam giác AHK vuông và tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp CA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$$

Ta có $AK \perp SC$ nên suy ra $AK \perp (SBC)$
 $\Rightarrow AK \perp HK \Rightarrow \triangle AKH$ vuông tại K .

Ta có $\widehat{AHK} = 60^\circ$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.

$$AK = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AH \Rightarrow AK^2 = \frac{3}{4} AH^2 \quad (1)$$

Đặt $SA = h$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2} \quad (3)$$

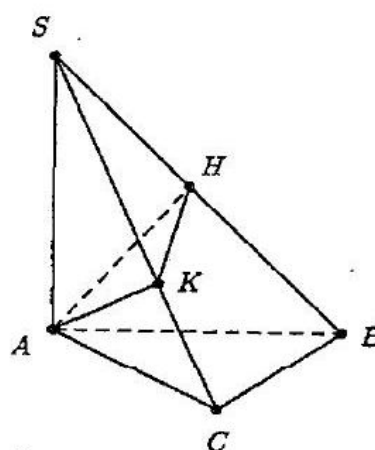
Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2} \right) = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}R}{2}.$$

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}R.$$

Thể tích khối chóp:

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}R}{2} \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{3}R = \frac{\sqrt{6}R^3}{12}.$$



Ví dụ 1.1.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích khối chóp S.AMPN.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD \perp (SOA)$ suy ra góc $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $\widehat{SOA} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SAO ta có: $SA = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$, từ đó suy ra: $SC \perp (AMN)$

Nên AP là đường cao của hình chóp S.AMPN

Suy ra: $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3} AP \cdot S_{AMPN}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC ta có:

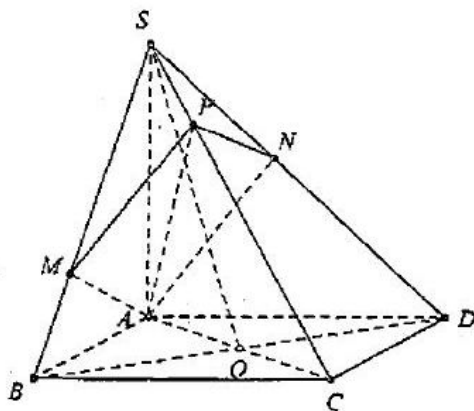
$$\frac{SP}{SC} = \frac{SP \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow SP = \frac{3}{7} SC = \frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB ta có: $AM = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Do $\triangle SBC \sim \triangle SPM \Rightarrow \frac{MP}{BC} = \frac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \frac{SP \cdot BC}{SB} = \frac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\triangle AMP} = AM \cdot MP = \frac{a^2 \sqrt{21}}{35}$

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{14}}{14} \cdot \frac{a^2 \sqrt{21}}{35} = \frac{3a^3 \sqrt{6}}{70}$.



Chú ý: Chúng ta có kết quả tổng quát quen thuộc sau:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khi đó: $SC \perp (AHK)$.

Ví dụ 1.1.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

(Trích đề thi ĐH Khối A – 2007)

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AD .

Ta có tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên:

$$\triangle CDH = \triangle BCP \Rightarrow BP \perp CH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

Mặt khác: $MN \parallel SC; AN \parallel HC \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$. Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

Suy ra $MK \parallel SH \Rightarrow MK \perp (CMN); MK = \frac{1}{2}SH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Diện tích tam giác CMN : $S_{CMN} = \frac{1}{2}CM \cdot CN = \frac{a^2}{8}$.

Thể tích khối tứ diện $CMNP$: $V_{CMNP} = \frac{1}{3}MK \cdot S_{CMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đv.t).

Ví dụ 1.1.12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

(Trích đề thi ĐH Khối B – 2008)

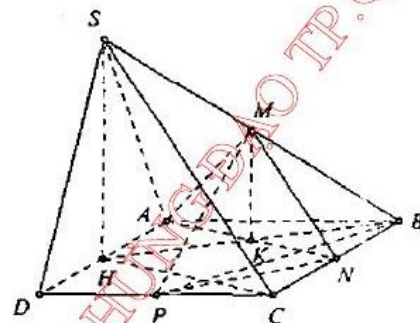
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2 \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại S

$$\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a.$$



Do đó tam giác SAM đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác BMDN là: $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN: $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

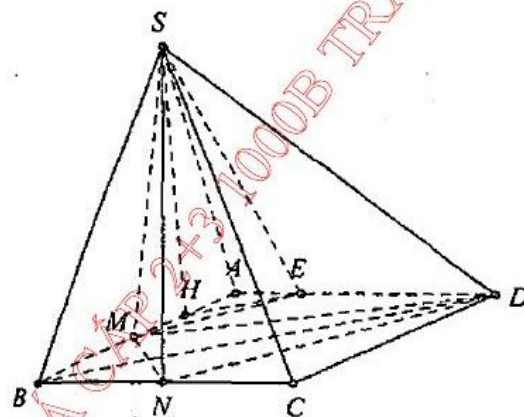
Kẻ $ME \parallel DN$ ($E \in AD$) $\Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $(SM, ME) = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

$$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Do } \triangle SME \text{ cân tại E nên } \widehat{SME} = \varphi \text{ và } \cos \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



Ví dụ 1.1.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

(Trích đề thi ĐH Khối D - 2010)

Lời giải.

• Chứng minh M là trung điểm SA

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}, HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}.$$

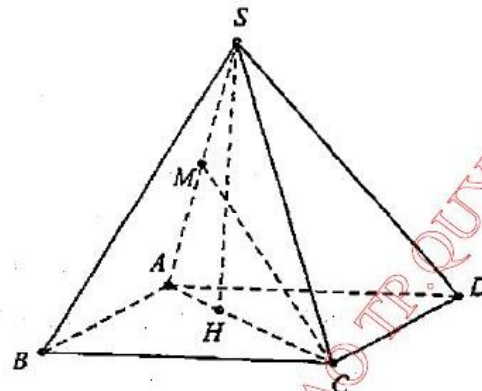
Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C nên M là trung điểm SA.

• Tính V_{SMBC} ?

Vì M là trung điểm SC nên

$$S_{SCM} = \frac{1}{2} S_{SAC}, \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} V_{SMBC} &= \frac{1}{2} V_{SABC} \\ &= \frac{1}{6} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{48}. \end{aligned}$$



Ví dụ 1.1.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SAC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt các góc 60° và 30° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp AB$

$$\text{Mà } (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD}$$

Vẽ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^\circ$.

Vẽ $HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{SEH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt đáy nên $\widehat{SEH} = 30^\circ$.

$$\text{Đặt } AB = x, \text{ trong tam giác SHE ta có: } SH = HE \cdot \tan 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta AKH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$$

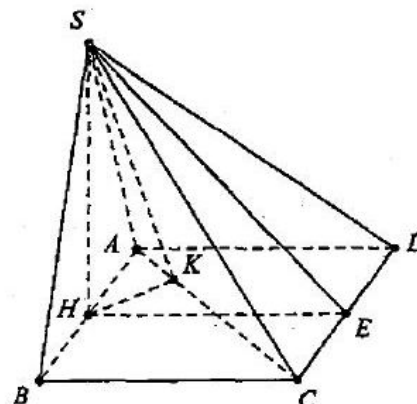
Trong tam giác SHK ta có:

$$SH = HK \tan 60^\circ = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là:



$$V = \frac{1}{3} S_{H.AB.AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot x = \frac{5a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Chú ý:

- Nếu mặt phẳng (SA_iA_j) của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ vuông góc với mặt đáy thì đường cao của tam giác SA_iA_j là đường cao của hình chóp.
- Trong một số bài toán, để tính độ dài một đoạn thẳng nào đó ta đặt đoạn thẳng đó bằng x rồi đi tính một đoạn thẳng khác bằng cách gắn vào hai hình. Khi đó hai kết quả tính được phải bằng nhau. Từ đó ta tìm được x .

Ví dụ 1.1.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

1) Tính $V_{S.ABCD}$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } SI \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD}$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{(AB + DC)AD}{2} = 2a^2$$

Vẽ $IK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy

$$\text{Nên } \widehat{SKI} = 60^\circ$$

$$\text{Vì } S_{\Delta IDC} = \frac{1}{2} DI \cdot DC = \frac{a^2}{4}, S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} AI \cdot BI = \frac{3a^2}{4},$$

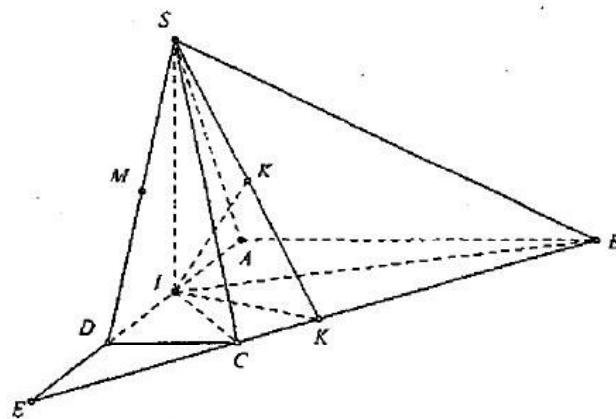
$$\text{suy ra } S_{\Delta IBC} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} + S_{\Delta IAB}) = a^2$$

$$\text{Mặt khác: } BC = \sqrt{(AB - DC)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \text{ và } S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2} IK \cdot BC$$

$$\text{Nên suy ra: } IK = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SIK \text{ ta có: } SI = IK \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot 2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{15}}{15}.$$



Gọi E là giao điểm của AD với BC, ta có:

$$\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow ED = \frac{1}{2}AD = ID$$

$$\text{Do đó: } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(D, (SBC)) = \frac{1}{4} d(I, (SBC))$$

Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có: $d(I, (SBC)) = IH$

Trong tam giác vuông SIK , ta có:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{5}{12a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{20}.$$

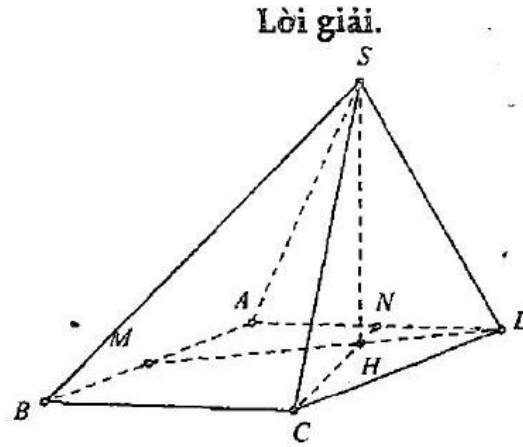
Chú yǐ:

- Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.
- Để tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) ta có thể sử dụng cách sau:

Nếu $AB \cap (\alpha) = \{I\}$ thì $d(A, (\alpha)) = \frac{AI}{BI} d(B, (\alpha))$.

Ví dụ 1.1.16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

(Trích đề thi ĐH Khối A – 2010)



Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} SH S_{MNDC}$

Mà $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle MBC} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Nên $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt).

Lại thấy: $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} (2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) \cdot \frac{1}{2} (2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy:

$$d(SC; DM) = d(H; SC) = \frac{2S_{\triangle HSC}}{SC} = \frac{SH \cdot CH}{SC} = \frac{SH \cdot CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}$$

Lại có: $CH = \frac{2S_{\triangle CMD}}{DM} = \frac{2(S_{ABCD} - S_{\triangle AMD} - S_{\triangle CMB})}{DM} = a\sqrt{\frac{4}{5}}$

Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

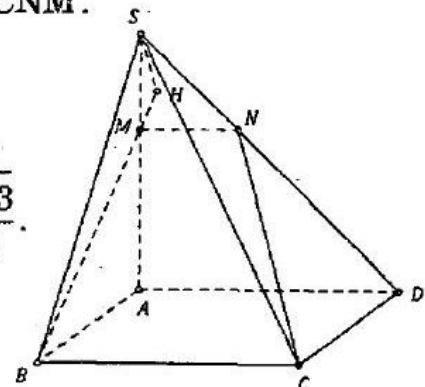
Ví dụ 1.1.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3a$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = 2MS$, mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tính thể tích của khối chóp $S.BCNM$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel BC$, suy ra $MN \perp (SAB)$ nên $BCNM$ là hình thang vuông tại B

và M . Do $SM = \frac{1}{3} SA$ nên $MN = \frac{1}{3} AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AM = \frac{2}{3} SA = 2a$



$$\Rightarrow BM = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } S_{BCNM} = \frac{(MN + BC) \cdot BM}{2} = \frac{2a^2\sqrt{15}}{3}$$

Vẽ đường cao SH của tam giác SBM, ta có $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (BCNM)$

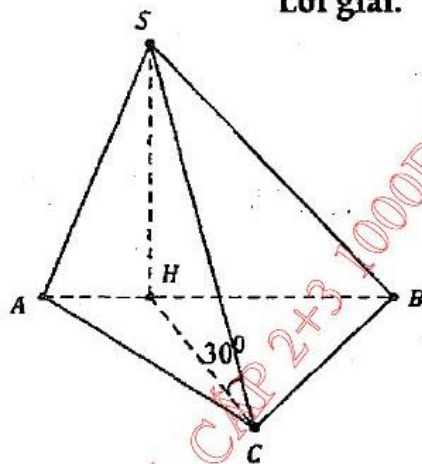
Tam giác MHS đồng dạng với tam giác MAB nên ta có:

$$\frac{SH}{SM} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow SH = \frac{AB \cdot SM}{BM} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{BCNM} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$$

Ví dụ 1.1.18. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cạnh bên SC tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.



Vẽ đường cao SH của tam giác ASB, do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Suy ra HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC). Do đó, góc $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC với mặt phẳng (ABC) nên $\widehat{SCH} = 30^\circ$.

Đặt $AH = x > 0$, trong tam giác vuông ASB, ta có:

$$SA^2 = AH \cdot AB = xa$$

$$\text{Suy ra } SH^2 = SA^2 - AH^2 = xa - x^2 \quad (1)$$

Áp dụng định lý cô sin cho tam giác AHC, ta có:

$$HC^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = x^2 + a^2 - xa$$

Trong tam giác SHC, ta có:

$$SH = HC \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow SH^2 = \frac{x^2 + a^2 - xa}{3} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{x^2 + a^2 - xa}{3} = xa - x^2 \Leftrightarrow (2x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

Ví dụ 1.1.19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

(Trích đề thi ĐH Khối D – 2011)

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S xuống BC . Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có: $SH = a\sqrt{3}$.

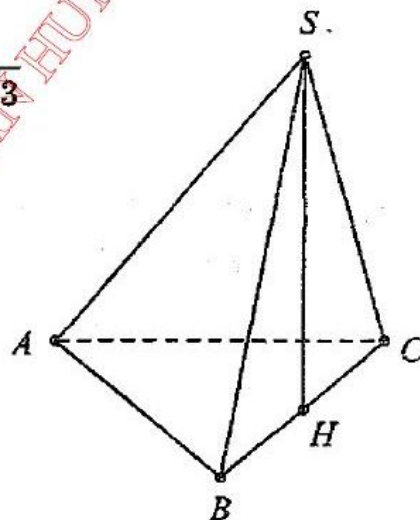
$$\text{Do đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = 2a^3 \sqrt{3}$$

Ta có tam giác SAC vuông tại S .

Vì $SA = a\sqrt{21}$, $SC = 2a$, $AC = 5a$

và $S_{\Delta SAC} = a^2 \sqrt{21}$ nên ta có được

$$d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}.$$



Ví dụ 1.1.20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

(Trích đề thi ĐH Khối A – 2011)

Lời giải.

Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp $S.BCNM$.

$$\text{Ta có: } S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN} = 2a^2 - \frac{1}{2} MA \cdot MN = 2a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC.$$

Nên $\widehat{SBA}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , thế thì theo giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BCNM} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3 \text{ (dvtt)}$$

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB \parallel NP$, $AB \not\subset (SPN)$ nên $AB \parallel (SPN)$ do đó $d(AB, SN) = d(AB, (SPN)) = d(A, (SPN))$

$$\text{Từ } A \text{ hạ } AE \perp NP, E \in PN \text{ thì } \begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases}$$

$\Rightarrow PN \perp (SAE)$; hạ $AH \perp SE$ thì

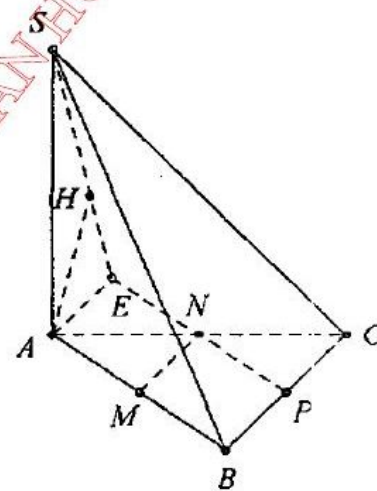
$$AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A, (SPN)) = AH.$$

$$\text{Ta có: } AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2}$$

$$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$$

$$\text{Vậy } d(A, (SPN)) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$$



Ví dụ 1.1.21. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB = 5a, BC = 6a, AC = 7a$.

Các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) . Biết hình chiếu của đỉnh S thuộc miền trong tam giác ABC .

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) , A', B', C' lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB .

Từ giả thiết suy ra $\widehat{SA'I} = \widehat{SB'I} = \widehat{SC'I} = 60^\circ$. Các tam giác vuông SIA', SIB', SIC' bằng nhau nên $IA' = IB' = IC' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Gọi p là nửa chu vi tam giác $ABC \Rightarrow p = \frac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} \\ &= \sqrt{9a(9a-6a)(9a-7a)(9a-5a)} = 6\sqrt{6}a^2 \end{aligned}$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có:

$$S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6\sqrt{6}a^2}{9a} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \Rightarrow IA' = r = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

$$\text{Ta có: } SI = IA' \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$$

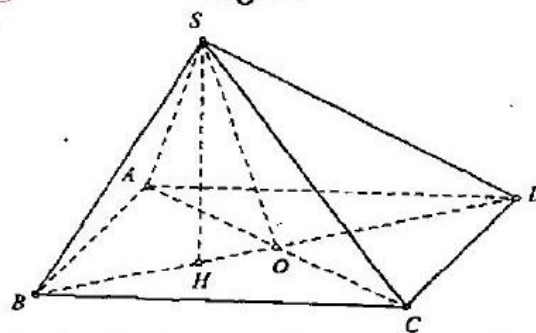
$$\begin{aligned} \text{Suy ra } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SI \\ &= \frac{1}{3} 2\sqrt{2}a \cdot 6\sqrt{6}a = 8\sqrt{3}a^3. \end{aligned}$$

Chú ý:

- Nếu các mặt bên của hình chóp tạo với đáy những góc bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn nội tiếp đáy.
- Nếu các cạnh bên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

Ví dụ 1.1.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Tính SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD .

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow O = BD \cap AC$ là hình chiếu của

A lên mặt phẳng (SBD) , mà $AS = AB = AD = a \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SBD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S . Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH = \frac{SB.SD}{BD}$ và $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$

Nên $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SB.SD}{BD} \cdot \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$

Do đó: $V_{SABCD} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot x \cdot \sqrt{3a^2 - x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

Suy ra: $V_{SABCD} \leq \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy V_{SABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 1.1.23. Cho tứ diện gần đều ABCD có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (DBC), dựng các đường thẳng qua các đỉnh và song song với cạnh còn lại của tam giác BCD chúng cắt nhau tại M, N, P. Khi đó B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn cạnh MN, NP, PM.

Ta có: $S_{\Delta MNP} = 4S_{\Delta BCD}$ nên $V_{AMNP} = 4V_{ABCD}$.

Vì $AD = BC$ và BC là đường trung bình của ΔNMP nên:

$$AD = DM = DP$$

Suy ra tam giác AMP là tam giác vuông tại A.

Tương tự cũng có các tam giác APN, ANM đều vuông tại A.

Vì thế $V_{AMNP} = \frac{1}{6}AM \cdot AN \cdot AP$. Đặt $AM = x, AN = y, AP = z$.

Chú ý $MN^2 = 4DC^2 = 4a^2$, nên áp dụng định lý Pitago cho các tam giác AMP, APN, ANM ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ z^2 + x^2 = 4c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2), y^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2), z^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Vậy } V_{AMNP} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}, \text{ nên}$$

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Ví dụ 1.1.24. Xét hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $CD = 2a$. Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy một góc 60° . Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất của V .

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy; M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CD, DA .

Ta có: $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} = \widehat{SQH} = 60^\circ$

Suy ra $\triangle SHM = \triangle SHN = \triangle SHP = \triangle SHQ \Rightarrow HM = HN = HP = HQ$

Suy ra $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác đó.

Đặt $AB = x$, $0 < x \leq 2a$ và $AB + CD = AD + BC = x + 2a$

Suy ra chu vi tứ giác: $p = \frac{AB + BC + CD + DA}{2} = 2a + x$

Diện tích của tứ giác $ABCD$: $S_1 = \frac{AB(BC + AD)}{2} = \frac{x(x + 2a)}{2}$.

Mặt khác: $S_1 = p.HM \Rightarrow HM = \frac{x}{2}$

Trong tam giác SHM , ta có: $SH = HM \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$:

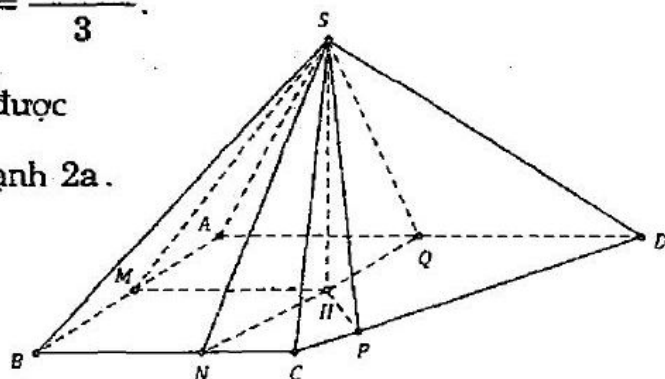
$$V = \frac{1}{3} SH.S_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x(x + 2a)}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2(x + 2a)}{12}$$

Do $x \leq 2a$ và hàm số $f(x) = x^2(x + 2a)$ đồng biến trên $(0; 2a)$ nên ta có

$$V \leq \frac{\sqrt{3}(2a)^2(2a + 2a)}{12} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$, đạt được

khi $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$.



1.3. Bài tập vận dụng

Bài 1.1.1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết:

- 1) Cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60°
- 2) Cạnh bên bằng $2a$ và $SA \perp BM$, với M là trung điểm SC .

Bài 1.1.2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đường cao SH . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ biết:

- 1) Cạnh đáy bằng a và khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b
- 2) Cạnh bên bằng b và mặt bên tạo với đáy một góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).
Đồng thời hãy xác định α để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất.

Bài 1.1.3. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$. Biết góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Bài 1.1.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

Bài 1.1.5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAC cân tại S , $\widehat{SBC} = 60^\circ$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với (ABC) . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 1.1.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO . Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60° và $SC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(AB, SC)$.

Bài 1.1.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O ; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Bài 1.1.8. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 2a$, $AC = a$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy

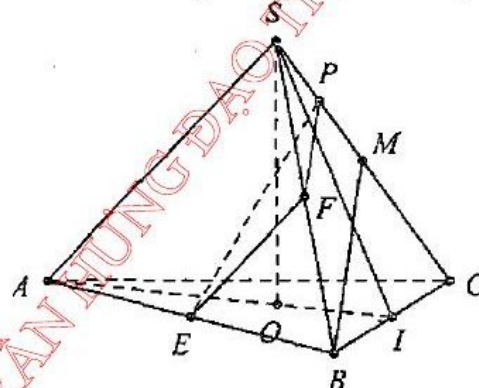
$$EP^2 = \frac{2(SE^2 + EM^2) - SM^2}{4} = \frac{9a^2}{16}$$

Tam giác EFP vuông tại F nên

$$EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{SABC} &= \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} \\ &= \frac{2a\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^3}{3} \end{aligned}$$



Bài 1.1.2.

1) Gọi E là trung điểm của BC

$$\Rightarrow HE \perp BC \text{ và } SH \perp BC \Rightarrow (SHE) \perp BC \Rightarrow (SHE) \perp (SBC).$$

Do đó, hạ $IK \perp SE \Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = b$.

Hai tam giác ΔSKI và ΔSHE đồng dạng với nhau suy ra

$$\frac{IK}{HE} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SH = \frac{HE \cdot SK}{IK} = \frac{a}{2b} SK = \frac{b}{2a} \sqrt{SI^2 - IK^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2a}{b} \sqrt{\frac{SH^2}{4} - b^2}$$

$$\Leftrightarrow SH^2 \left(1 - \frac{a^2}{16b^2} \right) = -\frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} \text{ và } S_{ABCD} = a^2$$

$$\text{Vậy } V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} a^2 = \frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

2) Ta có: $((SBC), (ABCD)) = \widehat{SEH} = \alpha$.

$$\text{Đặt } BC = x \text{ thì ta có } OE = \frac{x}{2}, OB = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SHE ta có $SH = HE \cdot \tan \alpha$, trong tam giác

$$\text{vuông SHB có: } SH^2 = SB^2 - HB^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} \tan \alpha \right)^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

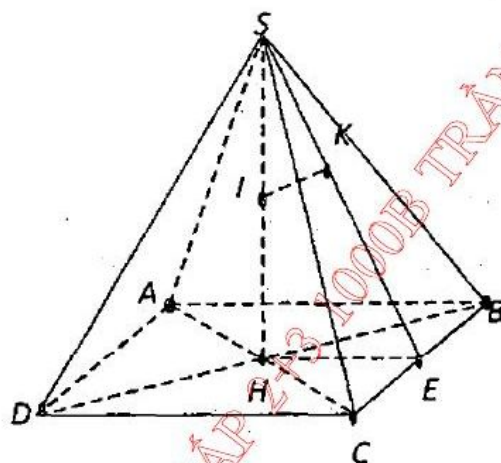
$$\Rightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\begin{aligned}
 V_{SABCD} &= \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{x}{2} \tan \alpha \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4h^2}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{h \tan \alpha}{\sqrt{2 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4h^3 \tan \alpha}{3 \sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3} = \sqrt{(1 + 1 + \tan^2 \alpha)^3} \geq \sqrt{(3\sqrt{\tan^2 \alpha})^3} = 3\sqrt{3} \tan \alpha$$

$$\text{Nên suy ra: } V_{SABCD} \leq \frac{4\sqrt{3}h^3 \tan \alpha}{27 \tan \alpha} = \frac{4\sqrt{3}h^3}{27}$$

$$\text{Vậy } \max V_{SABCD} = \frac{4\sqrt{3}h^3}{27} \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$



Bài 1.1.3. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow AB = AC$. Đặt $AB = AC = x$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{24}$$

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{24} a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{72}$$

Bài 1.1.4. Ta có: $MN \parallel AD$; $BC \perp SA$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông tại B và M.

Ta có: $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$, $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$,

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Diện tích hình thang BCMN: $S = \frac{BC + MN}{2} BM = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Hạ $SH \perp BM \Rightarrow SH \perp (BCMN)$

$\Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp S.BCMN.

Do $\triangle MHS \sim \triangle MAB$ nên suy ra:

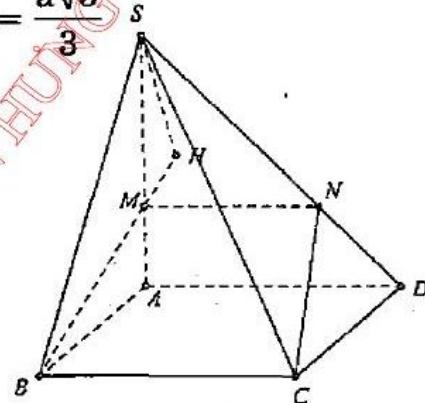
$$MH.MB = MS.MA \Rightarrow MH = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow BH = BM + MH = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{S.BCMN} = \frac{1}{3} S.SH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{10a^2}{3\sqrt{3}} \cdot a = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$$



Bài 1.1.5. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H là trung điểm của AC thì $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Đặt $SH = h$

$$\text{Ta có } SC^2 = HS^2 + HC^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}, \quad SB^2 = HS^2 + HB^2 = h^2 + \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Mà } SC^2 = BS^2 + BC^2 - 2BS.BC \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{3a^2}{4} + a^2 - 2a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$$

Bài 1.1.6. Kẻ $HK \perp AD \Rightarrow \widehat{SKH} = ((SAD), (ABCD)) = 60^\circ$

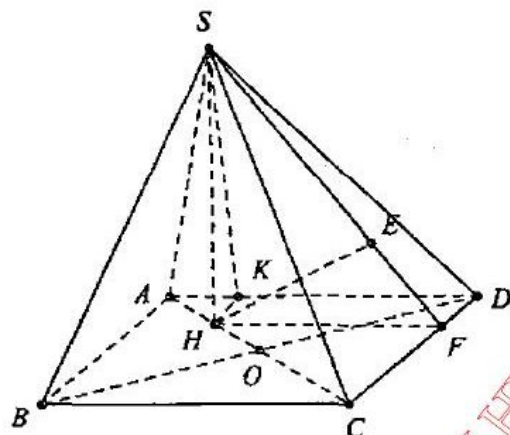
$$\text{Ta có: } HK = \frac{1}{4} CD = \frac{a}{4} \Rightarrow SH = HK \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad S_{ABCD} = a^2$$

$$\text{Nên } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Do } AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(A, (SCD)) = \frac{4}{3} d(H, (SCD))$$

$$\text{Vẽ } HF \perp CD, HE \perp SF \Rightarrow HE = d(H, (SCD)), HF = \frac{3}{4} AD = \frac{3}{4} a$$

$$\text{Trong tam giác SHF ta có: } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{8}$$



Bài 1.1.7. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Do hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên suy ra $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Kẻ } OE \perp AB, OK \perp SE \Rightarrow OK = d(O, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot DB = 2a^2\sqrt{3}. \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 1.1.8. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A.

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB \Rightarrow SB \perp (AHK)$

Do đó $\widehat{AHK} = \widehat{((SAB), (SBC))} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông AKH ta có:

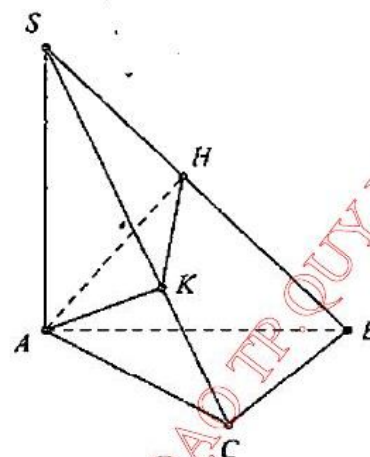
$$\frac{AK}{AH} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AH$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{1}{AK^2} &= \frac{4}{3AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

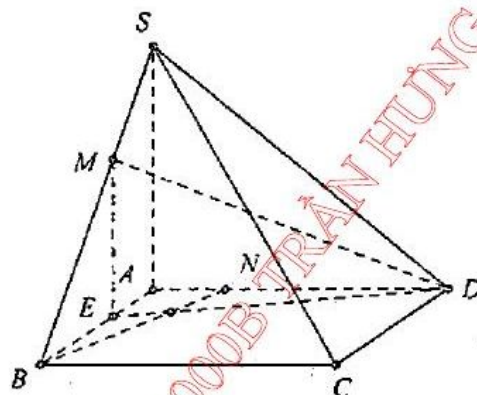
$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$$



Bài 1.1.9.



Vẽ $ME \parallel SA \Rightarrow ME \perp (ABCD)$, do đó $DM \perp BN \Leftrightarrow DE \perp BN$.

Đặt $AN = xAD$

Ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} BN \perp DE &\Leftrightarrow (3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + (3+x)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{aligned}$$

Ta có tam giác ABD đều nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Nên ta có: } -3xa^2 - a^2 + \frac{a^2(3+x)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow AN = \frac{2}{5}AD = \frac{2a}{5}$$

$$\text{Ta có: } ME = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2}AB \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{10}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta BND} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABN} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{20}$$

$$\text{Vậy } V_{BDMN} = \frac{1}{3}ME \cdot S_{\Delta BND} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{20} = \frac{a^3}{10}$$

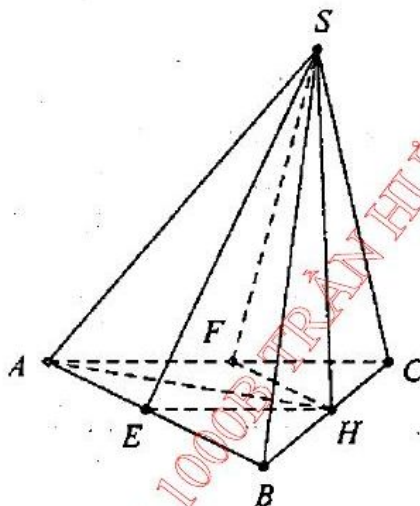
Bài 1.1.10.

Gọi H là hình chiếu của S lên BC; E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC suy ra $SH \perp (ABC)$ và $HE = HF$ nên AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{HF} = \frac{BC}{HC} = 1 + \frac{BH}{CH} = 1 + \frac{AB}{AC} \Rightarrow HF = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Suy ra } SH = HF \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = a^2$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}.$$

**Bài 1.1.11.**

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD), tương tự như ví dụ trên ta cũng có I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang ABCD.

Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp nên $AB + DC = AD + BC = 5a$

$$\text{Diện tích hình thang ABCD là } S = \frac{1}{2} (AB + DC) AD = \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 2a = 5a^2$$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang

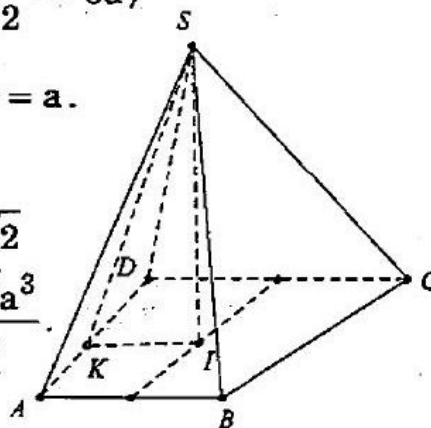
$$\text{ABCD thì } p = \frac{AB + DC + AD + BC}{2} = \frac{10a}{2} = 5a,$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{5a^2}{5a} = a \Rightarrow IK = r = a.$$

Tam giác SAD đều và có cạnh 2a nên

$$SK = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \sqrt{SK^2 - IK^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{\Delta SAD} \cdot h = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot 5a^2 = \frac{5\sqrt{2}a^3}{3}.$$



Bài 1.1.12.

- Tính $V_{S.ABC}$

Ta có: $AB = a, BC = a\sqrt{2}$ và

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B. Gọi H là trung điểm BC, ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\text{Do } SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{a}{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \text{ nên ta có:}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

- Tính $\alpha = (AB, CE)$ và $d(AB, CE)$

Gọi F là trung điểm của SA, suy ra $EF \parallel AB \Rightarrow (AB, CE) = (EF, CE)$

$$AB \parallel (CEF) \Rightarrow d(AB, CE) = d(AB, (CEF)) = d(A, (CEF)) = h$$

$$\text{Ta có: } EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, CE = \sqrt{SC^2 - \frac{SB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$CF = \sqrt{\frac{2(CS^2 + CA^2) - SA^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{CEF} = \frac{CE^2 + CF^2 - EF^2}{2CE \cdot CF} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = -\frac{\sqrt{21}}{14}$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 71^\circ$$

$$\text{Ta có: } V_{S.CEF} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} \Rightarrow V_{CABEF} = \frac{3}{4} V_{S.ABC}$$

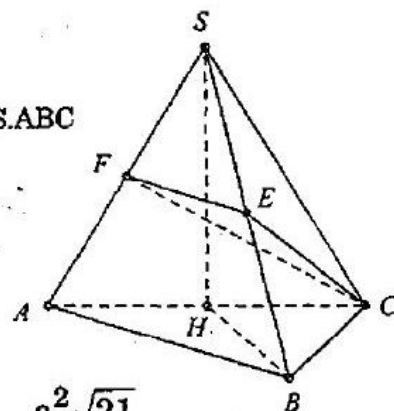
$$\text{Mặt khác } S_{\triangle AFB} = 2S_{\triangle BFE}$$

$$\Rightarrow V_{B.CEF} = \frac{1}{3} V_{CABEF} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{a^2 \sqrt{21}}{112}$$

$$\text{Vậy } h = \frac{3V_{B.CEF}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{3}{48} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}}{\frac{a^2 \sqrt{21}}{112}} = \frac{a\sqrt{42}}{3}$$



Bài 1.1.13.

Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có $H \in BD$ và $SH \perp (ABCD)$.

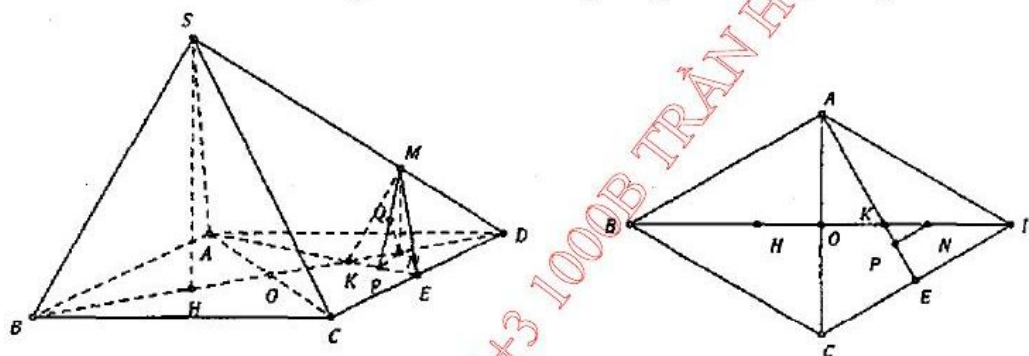
Do $ABCD$ là hình thoi nên $AO \perp BD$ (O là tâm của hình thoi $ABCD$).

Suy ra $AO \perp (SBD)$

Mà $AS = AB = AD = a$ nên ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD , mà O là trung điểm BD nên ta suy ra tam giác SBD vuông tại S , suy ra $BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra tam giác ABC đều nên $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Gọi K là giao điểm của AE với BD , K là trọng tâm tam giác ADC .

Từ K vẽ đường thẳng song song với SB , cắt SD tại M . Suy ra $SB \parallel (AME)$

Suy ra $d(SB, AE) = d(SB, (AME)) = d(S, (AME)) = \frac{SM}{DM} \cdot d(M, (AME))$

Từ M vẽ $MN \parallel SH$, $N \in BD$, suy ra $d(D, (AME)) = \frac{DK}{NK} \cdot d(N, (AME))$.

Ta có: $\frac{SM}{DM} = \frac{SK}{DK} = 2$, $\frac{DN}{DH} = \frac{DM}{DS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DN}{DK} = \frac{2}{3}$

Suy ra $d(SB, AE) = \frac{4}{3} d(N, (AME))$.

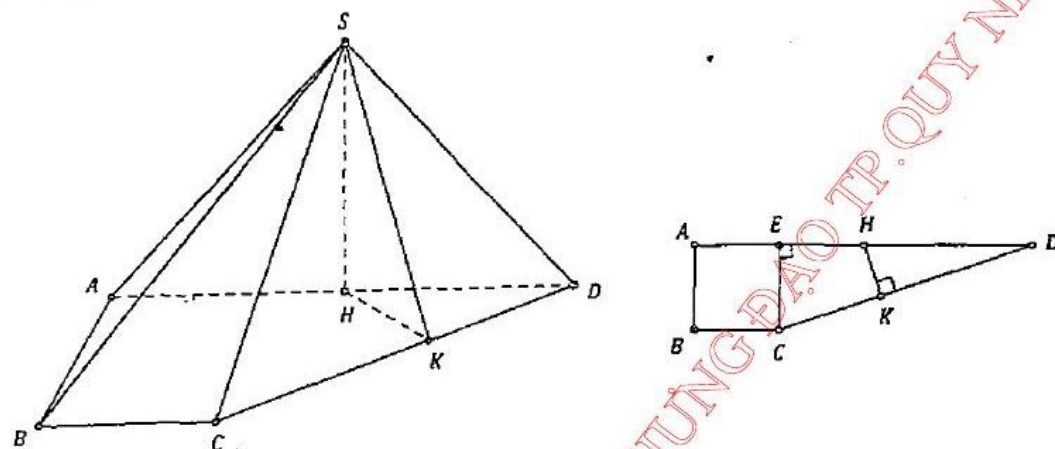
Vẽ $NP \perp KE \Rightarrow KE \perp (MNP)$, vẽ $NQ \perp MP$.

Ta có $NQ \perp KE \Rightarrow NQ \perp (AME) \Rightarrow d(N, (AME)) = NQ$

Ta có: $MN = \frac{1}{3} SH = \frac{a\sqrt{6}}{9}$, $\frac{NP}{DE} = \frac{KN}{KD} = \frac{1}{3} \Rightarrow NP = \frac{1}{3} DE = \frac{a}{6}$

$$\text{Suy ra } NQ = \frac{NM \cdot NP}{\sqrt{NM^2 + NP^2}} = \frac{a\sqrt{22}}{33}. \text{ Vậy } d(SB, AE) = \frac{a\sqrt{22}}{33}.$$

Bài 1.1.14.



Gọi H là trung điểm đoạn AD, ta có $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Gọi K là hình chiếu của H lên CD, ta có $CD \perp (SKH)$. Suy ra $\widehat{SKH}$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy, do đó $\widehat{SKH} = 60^\circ$.

Gọi E là hình chiếu của C lên AD, suy ra ABCE là hình vuông cạnh a.

$$\text{Ta có: } CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = a\sqrt{10}$$

Do $\triangle CED \sim \triangle HKD$ nên ta có:

$$\frac{HK}{CE} = \frac{KD}{DE} \Rightarrow HK = \frac{KD \cdot CE}{DE} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot a}{3a} = \frac{a\sqrt{10}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } SH = HK \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{6}, S_{ABCD} = \frac{AB(AD + BC)}{2} = \frac{5a^2}{2}$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp là: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{5a^3\sqrt{30}}{12}.$$

Bài 1.1.15.

Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$.

Ta có $\triangle ACD$ cân tại A nên $CD \perp AE$. Tương tự $CD \perp BE$

Suy ra $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$

$$\text{Mà } BH \perp AE \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{3}}. \text{ Gọi } \alpha = \widehat{(ACD), (BCD)}.$$

$$\text{Thể tích của khối tứ diện ABCD là } V = \frac{1}{3} BH \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE \cdot DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{9} \Rightarrow AE^2 \cdot DE^2 = \frac{5a^4}{9}$$

Mặt khác: $AE^2 + DE^2 = 2a^2 \Rightarrow AE^2, DE^2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2a^2x + \frac{5a^4}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{3}, x = \frac{5a^2}{3}$.

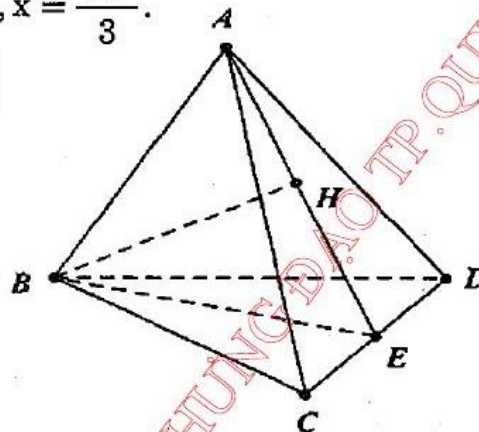
$$\text{Vì } DE < a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AE = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Xét ΔBED vuông tại E nên

$$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Xét ΔBHE vuông tại H nên

$$\sin \alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



Vậy góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^\circ$.

Bài 1.1.16. Gọi H là hình chiếu của I lên AB, suy ra $AB \perp (SIH) \Rightarrow \widehat{SHI}$ là góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy. Do đó $\widehat{SHI} = 60^\circ$.

Do tam giác ABD đều nên suy ra $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $BD = \frac{2a}{3}$ nên áp dụng định lí cô sin cho tam giác BDM ta có:

$$MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2BM \cdot BD \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{MD}{\sin 60^\circ} = \frac{BM}{\sin \widehat{BDM}} \Rightarrow \sin \widehat{BDM} = \frac{BM \cdot \sin 60^\circ}{MD} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \widehat{BDM} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{BDM} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \widehat{BDM}} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OI = OD \cdot \tan \widehat{BDM} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow I \text{ là trung điểm } AO$$

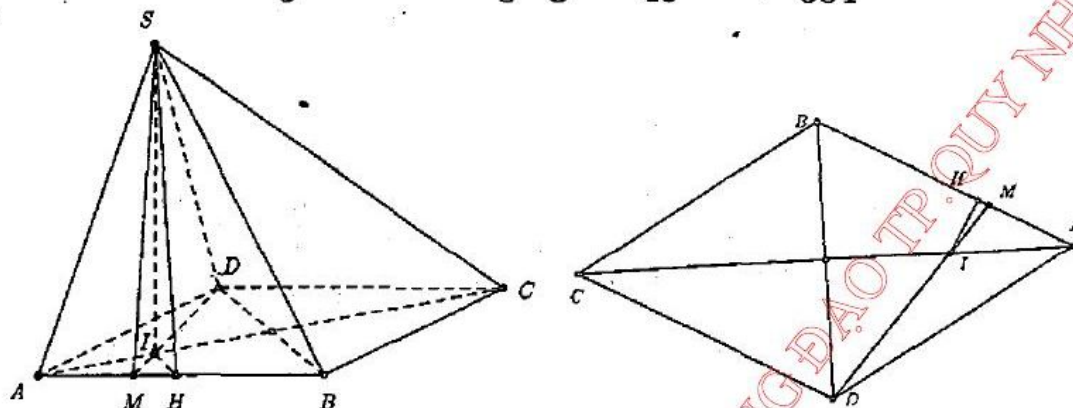
$$\text{Ta có } \Delta AHI \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{IH}{OB} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IH = \frac{AI \cdot OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Suy ra } SI = IH \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$$

$$\frac{S_{\Delta AMI}}{S_{\Delta ABO}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AI}{AO} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{\Delta AMI} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABO} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48}$$

$$\text{Do đó } S_{\text{MICB}} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMI} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^2\sqrt{3}}{48}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{SMICB}} = \frac{1}{3} S_{\text{MICB}} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{11a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{384} \text{ (đvtt).}$$



Bài 1.1.17. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABD $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^2}{3} \cdot SH$$

Kẻ $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow SK \perp AB$.

Suy ra $\widehat{(SAB), (ABCD)} = \widehat{(SK, HK)} = \widehat{SKH} = 60^\circ$

Gọi O là tâm của đáy, ta có

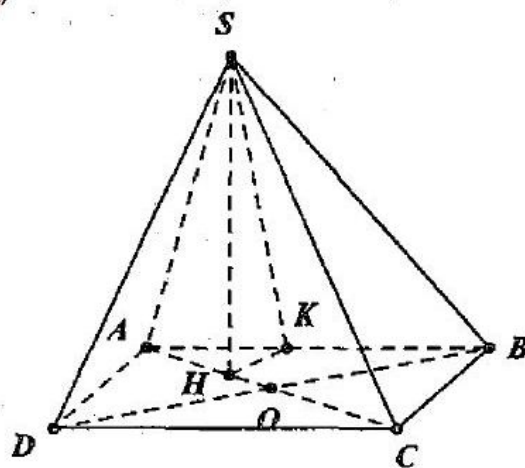
$$\Delta AKH \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{KH}{OB}$$

$$\Rightarrow KH = \frac{AH \cdot OB}{AB} = \frac{2 \cdot OB^2}{3 \cdot AB} = \frac{a}{3}$$

Trong tam giác vuông SHK ta có:

$$SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$



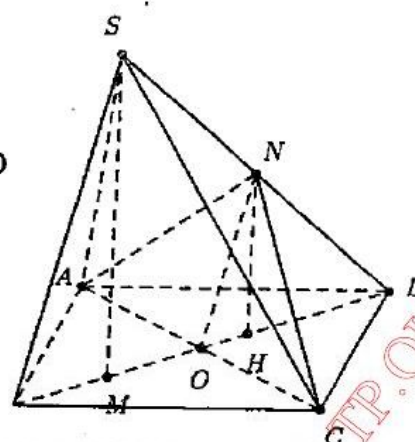
Bài 1.1.18. Vì hai mặt phẳng (SAM) và (SCM) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên giao tuyến SM của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của MD, suy ra $NH \parallel SM \Rightarrow NH \perp (ABCD)$

Do $DO \perp AC \Rightarrow AC \perp (NHO) \Rightarrow \widehat{NOH} = 60^\circ$

$$\text{Ta có: } HD = \frac{1}{2} DM = \frac{3}{4} OD \Rightarrow HO = \frac{1}{4} OD = \frac{a\sqrt{2}}{8}$$

Trong tam giác vuông NHO, ta có:

$$\begin{aligned} NH &= OH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{8} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{4} \\ V_{NACD} &= \frac{1}{2} V_{SACD} \Rightarrow V_{SACN} = \frac{1}{2} V_{SACD} \\ &= \frac{1}{6} SH S_{\Delta ACD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48} \end{aligned}$$



Bài 1.1.19. Kẻ SH vuông góc AC ($H \in AC$) $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\Rightarrow SC = BC = a\sqrt{3}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{4}$$

Gọi M là trung điểm SB và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có: $SA = AB = a$, $SC = BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AM \perp SB$ và $CM \perp SB$, suy ra

$$\cos \varphi = |\cos \widehat{AMC}|$$

$$\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SH = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

AM là trung tuyến ΔSAB nên:

$$AM^2 = \frac{2AS^2 + 2AB^2 - SB^2}{4} = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Tương tự: } CM = \frac{a\sqrt{42}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{AMC} = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2 \cdot AM \cdot CM} = -\frac{\sqrt{105}}{35}$$

$$\text{Vậy: } \cos \varphi = \frac{\sqrt{105}}{35}$$

Bài 1.1.20. Đặt $SA = x$.

Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$;

$$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI.$$

Đựng $DE \perp SI$, $E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$.

Do đó $\widehat{BED}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy ABCD là nửa lục giác đều nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 60^\circ \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

$$\text{Vì vậy } AI = AB = 2a, SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{x^2 + (2a)^2} = \sqrt{x^2 + 4a^2}.$$

$$\text{Để thấy } \triangle SAI \sim \triangle DEI \Rightarrow \frac{DE}{SA} = \frac{DI}{SI} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}} \Rightarrow DE = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 4a^2}}.$$

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có:

$$\tan \widehat{BED} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + 4a^2}}{ax} = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + 4a^2) = 7x^2 \Rightarrow x = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} CB \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}.$$

Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$.

Do đó $\widehat{PAQ} = \widehat{((SBC), (SCD))}$.

Trong tam giác SAH ta có:

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

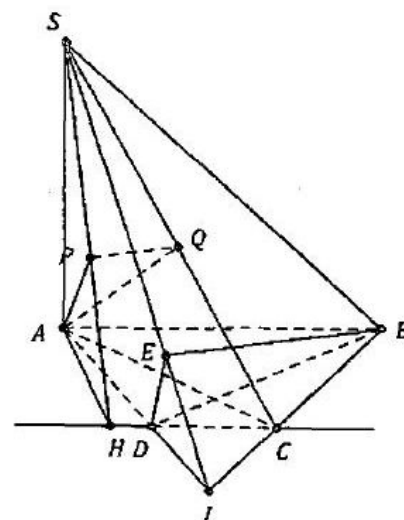
$$\text{Để thấy } \triangle SAC \text{ vuông cân tại A nên } AQ = \frac{1}{2} SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Do $AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong $\triangle APQ$ có

$$\cos \widehat{APQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{a\sqrt{\frac{5}{3}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{((SBC), (SCD))} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



Bài 1.1.21. Áp dụng định lí hàm số cô sin cho tam giác SAB ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha) = 4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Tương tự: } BC = 2a \cos \frac{\beta}{2}, \quad CA = 2a \cos \frac{\gamma}{2}$$

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy (ABC), ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\text{Nên } AH = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S}, \quad S = S_{\Delta ABC}, \text{ suy ra}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{16a^2 S^2 - (AB \cdot BC \cdot CA)^2}}{4S}$$

$$\text{Do đó: } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} \sqrt{16a^2 S^2 - 64a^6 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$

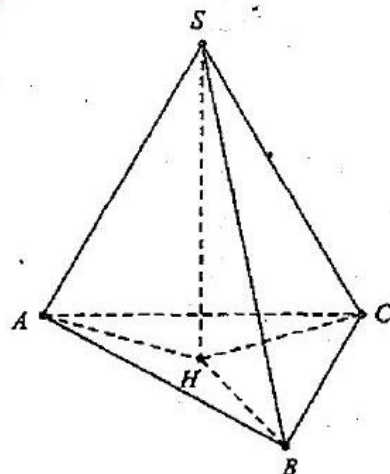
$$\text{Gọi } p \text{ là nửa chu vi tam giác ABC, ta có: } p = a \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$\text{Nên } S^2 = p(p - AB)(p - BC)(p - CA)$$

$$= a^4 \left[\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right] \left[\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 \right] \quad (*)$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{a^3 k}{3} \text{ với}$$

$$k = \sqrt{\left[\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 - \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right] \left[\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 \right] - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$



Chuyên đề 2. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

2.1. Phương pháp giải: Sử dụng công thức thể tích

- Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h$
- Thể tích khối hộp chữ nhật có các cạnh a, b, c : $V = abc$
- Thể tích khối lập phương cạnh a : $V = a^3$

Để tính thể tích của khối lăng trụ $A_1A_2...A_n$, ta cần đi tính chiều cao của lăng trụ và diện tích đáy. Các tính chất của lăng trụ

a) Hình lăng trụ

- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau
- Lăng trụ có các cạnh bên vuông góc hai đáy được gọi là lăng trụ đứng
- * Các cạnh bên của lăng trụ đứng chính là đường cao của nó
- * Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình chữ nhật
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều
- Các mặt bên của lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

b) Hình Hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành

- Hình hộp đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy
- Hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật
- Hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau được gọi là hình lập phương
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$

2.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.2.1. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60° và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC , suy ra $BC \perp (A'MA)$ nên

$$\widehat{A'MA} = \widehat{(A'BC), (ABC)} = \widehat{(A'BC), (A'B'C')} = 60^\circ$$

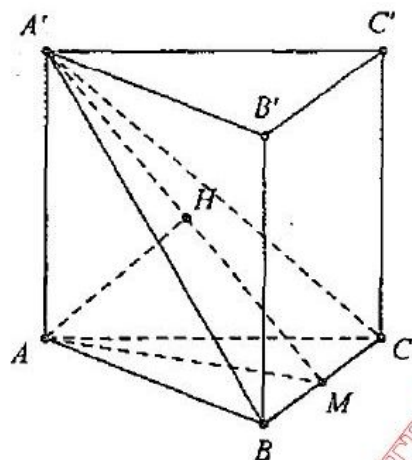
Gọi H là hình chiếu của A lên $A'M \Rightarrow AH = d(A, (A'BC)) = \frac{3a}{2}$

Trong tam giác vuông AHM ta có: $AM = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông AA'M ta có: $AA' = AM \tan 60^\circ = 3a$

Vì $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = 2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là: $V = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = 3a^3\sqrt{3}$.



Chú ý: Khi giải các bài toán về hình lăng trụ, các giả thiết được thể hiện trên một hình chóp và sử dụng các kĩ thuật đã biết trên hình chóp. Chẳng hạn, ở trong bài toán trên các giả thiết của bài toán được thể hiện trên hình chóp A'.ABC.

Ví dụ 1.2.2. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc 30° , khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.

Lời giải.

Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD, ta có

$$AC \perp (B'OB) \Rightarrow \widehat{B'OB} = 30^\circ$$

Gọi H là hình chiếu của B lên B'O, suy ra

$$BH = d(B, (B'AC)) = d(B, (D'AC)) = \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó: } BO = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = a \Rightarrow OC = \sqrt{BC^2 - BO^2}$$

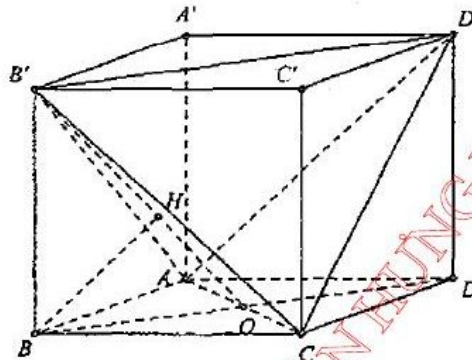
$$= a\sqrt{3}, BB' = BO \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2BO \cdot CO = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Nên } V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB' \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} = 2a^3$$

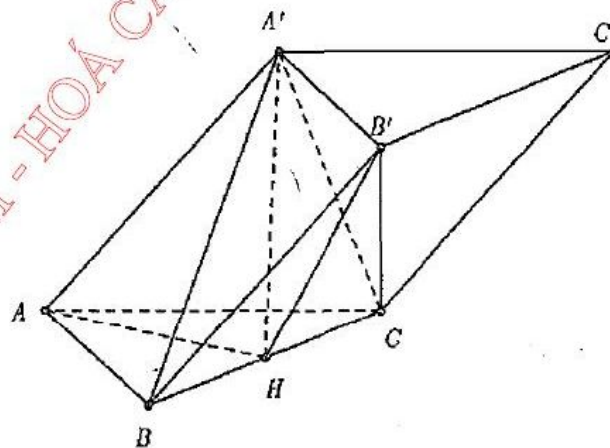
$$\text{Mặt khác } V_{B'ABC} = V_{D'ACD} = V_{CB'C'D'} = V_{AA'B'C'} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$\text{Nên suy ra } V_{ACB'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{2a^3}{3}$$



Ví dụ 1.2.3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Lời giải.



- Tính thể tích khối chóp $A'.ABC$.

Gọi H là trung điểm BC .

Theo bài ta có $A'H \perp (ABC)$ và

$$AH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 3a^2} = a.$$

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp $A'.ABC$ là

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{2}.$$

• Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Do $AA' \parallel BB'$, $B'C' \parallel BC$ nên góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ cũng là góc giữa hai đường thẳng BB' và BC .

Áp dụng Pitago cho tam giác $A'B'H$ ta có

$$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a.$$

Suy ra tam giác $B'BH$ cân tại B' .

Do đó $\varphi = \widehat{B'BH}$ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{BH}{BB'} = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}.$$

Chú ý: Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b ta có các cách sau

Cách 1: Tìm góc giữa hai đường thẳng a, b bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng). Từ O dựng các đường thẳng a', b' lần lượt song song (có thể ở trong nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với a và b . Góc giữa hai đường thẳng a', b' chính là góc giữa hai đường thẳng a và b .

Để tính góc này ta thường sử dụng định lý côsin trong tam giác:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cách 2: Tìm hai vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của hai đường thẳng a, b

$$\text{Khi đó góc giữa hai đường thẳng } a, b \text{ xác định bởi } \cos(a, b) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}.$$

Để tính $|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|$, $|\vec{u}_1|$, $|\vec{u}_2|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng, sau đó biểu thị các vec tơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

Ví dụ 1.2.4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a $A'A = A'B = A'C$, $\widehat{BAA'} = \alpha$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) .

Vì $AA' = A'B = A'C$ nên

$HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác $AA'B$ cân tại A' và có $\widehat{BAA'} = \alpha$ nên $\alpha < 90^\circ$

và $\widehat{AA'B} = 180^\circ - 2\alpha$.

Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác $AA'B$ ta có

$$AB^2 = A'A^2 + A'B^2 - 2A'A \cdot A'B' \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 4A'A^2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra: } A'A = \frac{a}{2 \cos \alpha}.$$

Vì ABC là tam giác đều, nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó $AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

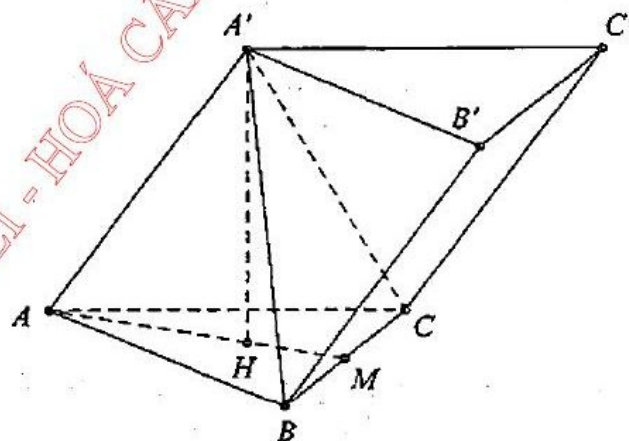
Xét tam giác $A'AH$ ta có:

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2(3 - 4 \cos^2 \alpha)}{12 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{a}{6 \cos \alpha} \sqrt{3(3 - 4 \cos^2 \alpha)}.$$

Thể tích của khối lăng trụ là:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{6 \cos \alpha} \sqrt{3(3 - 4 \cos^2 \alpha)} = \frac{a^3 \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha}}{8 \cos \alpha}.$$



Ví dụ 1.2.5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt bên và mặt $(A'BD)$

hợp với đáy góc 60° , biết góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AB = 2a$, $BD = a\sqrt{7}$.

Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABD), J, K là hình chiếu của H trên AB, AD

Áp dụng định lí cosin cho $\triangle ABD$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}$$

$$\Rightarrow AD^2 - 2a \cdot AD - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow AD = 3a$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

Từ giả thiết suy ra hình chóp A'.ABD có các mặt bên hợp đáy góc 60°

Nên H là cách đều các cạnh của $\triangle ABD$

TH 1: Nếu H nằm trong $\triangle ABD$ thì H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$.

Góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và đáy bằng $\widehat{A'JH} = 60^\circ$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$ thì:

$$r = \frac{S_{\triangle ABD}}{p} = \frac{3\sqrt{3}a}{5 + \sqrt{7}} \Rightarrow A'H = r \cdot \tan 60^\circ = \frac{9a}{5 + \sqrt{7}}$$

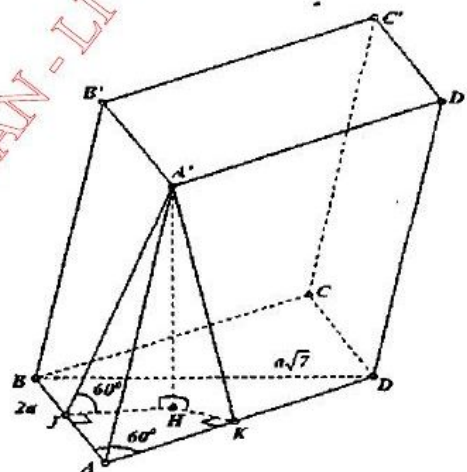
$$\text{Từ đó, } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'.ABD} = 6 \cdot \frac{1}{3} A'H \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{27\sqrt{3}a^3}{5 + \sqrt{7}}$$

TH 2: Nếu H nằm ngoài $\triangle ABD$ thì H là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAD}$ của $\triangle ABD$.

Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp $\triangle ABD$ tương ứng thì:

$$r_a = \frac{S_{\triangle ABD}}{p - BD} = \frac{3\sqrt{3}a}{5 - \sqrt{7}} \Rightarrow A'H = r_a \cdot \tan 60^\circ = \frac{9a}{5 - \sqrt{7}}$$

$$\text{Từ đó, } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'.ABD} = 6 \cdot \frac{1}{3} A'H \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{27\sqrt{3}a^3}{5 - \sqrt{7}}$$



Ví dụ 1.2.6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thoi. Biết diện tích hai mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là s_1, s_2 , góc $\widehat{BA'D} = 90^\circ$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo s_1 và s_2 .

Lời giải.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên các mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hình chữ nhật, do đó: $s_1 = AC.AA'$, $s_2 = BD.AA'$

Tam giác $AA'O$ vuông tại A nên:

$$OA'^2 = AA'^2 + OA^2 = AA'^2 + \frac{AC^2}{4} \quad (1)$$

mà tam giác $A'BD$ vuông tại A' nên $OA' = \frac{BD}{2}$,

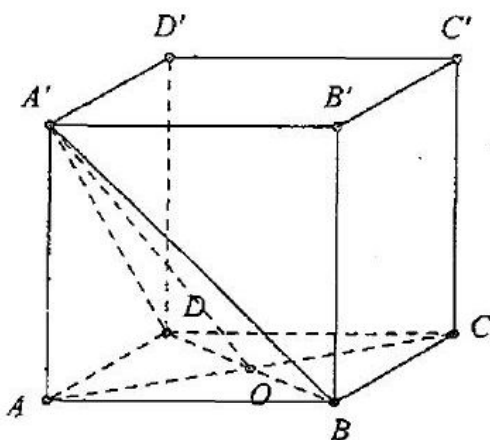
thay $AC = \frac{s_1}{AA'}$, $OA = OA' = \frac{BD}{2} = \frac{s_2}{2AA'}$ vào (1) suy ra:

$$AA'^2 + \frac{s_1^2}{4AA'^2} = \frac{s_2^2}{4AA'^2} \Rightarrow 4AA'^4 = s_2^2 - s_1^2 \Rightarrow AA' = \sqrt[4]{\frac{s_2^2 - s_1^2}{4}}$$

Ta lại có: $s_1 s_2 = AA'^2 . AC . BD = AA'^2 . 2S_{ABCD} = \sqrt{s_2^2 - s_1^2} . S_{ABCD}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{s_1 s_2}{\sqrt{s_2^2 - s_1^2}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' . S_{ABCD} = \sqrt[4]{\frac{s_2^2 - s_1^2}{4}} \cdot \frac{s_1 s_2}{\sqrt{s_2^2 - s_1^2}} = \frac{\sqrt{2s_1 s_2}}{2\sqrt[4]{s_2^2 - s_1^2}}.$$

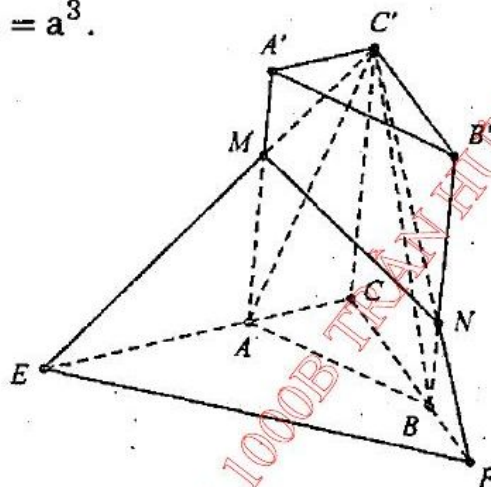


Bài 1.2.7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng thể tích khối lập phương cạnh a . Trên các cạnh AA', BB' lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CM với $C'A'$ và CN với $C'B'$.

- 1) Mặt phẳng (CMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.
- 2) Tính thể tích khối chóp $C'CEF$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$.



- 1) Do $V_{C'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$, suy ra

$$V_{C'.ABB'A'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2a^3}{3}$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABNM} = S_{A'B'NM} \Rightarrow V_{C'.A'B'NM} = \frac{1}{2} V_{C'.ABB'A'} = \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{C'.CABNM} = \frac{2a^3}{3}. \text{ Vậy } \frac{V_{C'.A'B'NM}}{V_{C'.CABNM}} = \frac{1}{2}.$$

- 2) Ta có: $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{\frac{1}{2} CE.CF.\sin \widehat{ECF}}{\frac{1}{2} CA.CB.\sin \widehat{ACB}} = \frac{CE.CF}{CA.CB}$

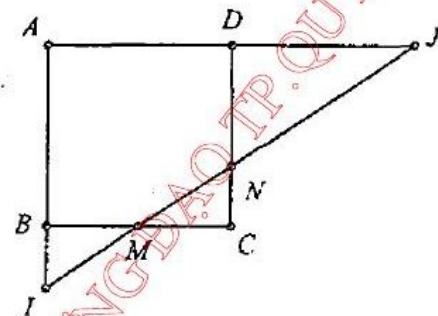
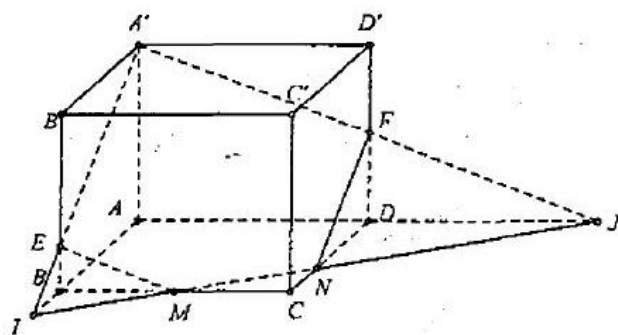
$$\text{Mà } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{CC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = 3, \frac{BF}{BC} = \frac{BN}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra } C_{C'.CEF} = \frac{9}{2} V_{C'.CAB} = \frac{3a^3}{2}.$$

Ví dụ 1.2.8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC , N thuộc cạnh CD thỏa $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai khối, gọi (H) là khối chứa điểm A . Tính thể tích của khối (H) theo a .

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng MN cắt AB, AD lần lượt tại I, J ; $A'I \cap BB' = \{E\}$

$A'J \cap DD' = \{F\}$. Khi đó $A'EMNF$ là thiết diện của khối lập phương cắt bởi $(A'MN)$

Ta có: $V_H = V_{A'.AIJ} - V_{BIME} - V_{DFNJ}$.

$$\text{Ta có: } \frac{BI}{CN} = \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow BI = CN = \frac{a}{3};$$

$$\frac{DJ}{MC} = \frac{DN}{CN} = 2 \Rightarrow DJ = 2MC = a$$

$$\frac{BE}{AA'} = \frac{IB}{IA} = \frac{1}{4} \Rightarrow BE = \frac{a}{4}; \frac{DF}{AA'} = \frac{JD}{JA} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = \frac{a}{2}$$

$$\text{Suy ra } AI = AB + BI = \frac{4a}{3}, AJ = AD + DJ = 2a$$

Mặt khác với một tứ diện vuông $O.ABC$ thì $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC$

$$\text{nên ta có: } V_{A'.AIJ} = \frac{1}{6}AA'.AI.AJ = \frac{4a^3}{9}$$

$$V_{B.EMI} = \frac{1}{6}BI.BE.BM = \frac{a^3}{144}; V_{D.INF} = \frac{1}{6}DJ.DN.DF = \frac{a^3}{18}$$

$$\text{Vậy } V_H = \frac{55a^3}{144}$$

Ví dụ 1.2.9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa đường chéo AC' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 30° và $AC' = a$, $\widehat{AC'B} = \varphi$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ theo a và φ . Giả sử a không đổi, tìm φ để thể tích khối hộp lớn nhất.

Lời giải.

$$\text{Ta có } CC' \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{CAC'} = \left(\widehat{AC', (ABCD)} \right) = 30^\circ;$$

$$AC = AC' \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Để thấy tam giác ABC' vuông tại B , suy ra $AB = AC' \sin \varphi = a \sin \varphi$

$$\text{Nên } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a\sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{2} \text{ và}$$

$$CC' = \frac{AC'}{2} = \frac{a}{2}.$$

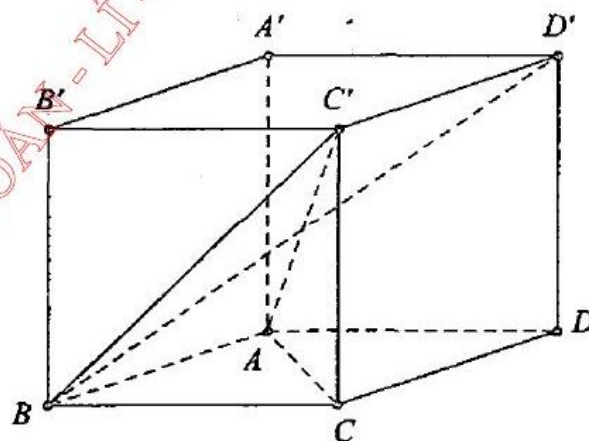
Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$V = CC' \cdot CB \cdot AB = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{2} \cdot a \sin \varphi = \frac{a^3 \sin \varphi \sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{4}$$

$$\text{Ta có: } 2 \sin \varphi \sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi} \leq \left(\frac{4 \sin^2 \varphi + 3 - 4 \sin^2 \varphi}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Nên suy ra } V = \frac{a^3 \sin \varphi \sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{4} = \frac{a^3}{8} \left(2 \sin \varphi \sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi} \right) \leq \frac{9a^3}{32}$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{9a^3}{32} \Leftrightarrow 2 \sin \varphi = \sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi} \Leftrightarrow \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}.$$



2.3. Bài tập vận dụng.

Bài 1.2.1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° .

Bài 1.2.2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu của A' lên $mp(ABC)$ trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

Bài 1.2.3. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ biết cạnh bên $AA' = 2a$.

Bài 1.2.4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Biết $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{2}$.

Bài 1.2.5. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm cạnh CC' , biết $AM \perp B'M$. Hãy tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $\cos$ của góc hợp bởi mặt phẳng (AMB') với (ABC) .

Bài 1.2.6. Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a , đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

Bài 1.2.7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu của đỉnh C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Bài 1.2.8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = 90^\circ$, $\widehat{DAA'} = 120^\circ$. Tính thể tích khối hộp.

Bài 1.2.9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ bằng a , khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ .

- 1) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a, b và φ .
- 2) Khi $a = b$ không đổi, hãy xác định φ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

Bài 1.2.10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

Bài 1.2.11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , $B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D – 2008)

Bài 1.2.12. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính $\cos$ của góc giữa hai đường thẳng AA' , $B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối A – 2008)

Bài 1.2.13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

(Trích đề thi ĐH Khối D – 2009)

Bài 1.2.14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a .

(Trích đề thi ĐH Khối B – 2009)

Bài 1.2.15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .

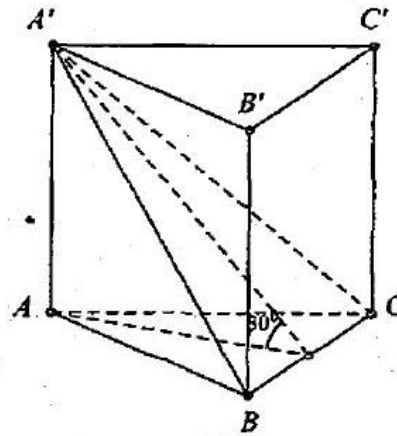
(Trích đề thi ĐH Khối B – 2010)

Bài 1.2.16. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

(Trích đề thi ĐH Khối B – 2011)

Hướng dẫn giải

Bài 1.2.1.



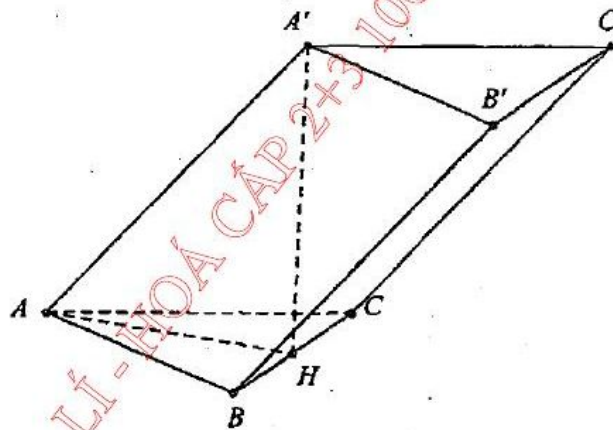
Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC,

suy ra $BC \perp (A'MA) \Rightarrow \widehat{A'MA} = \widehat{(A'BC), (ABC)} = 30^\circ$.

Do $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = AM \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

Bài 1.2.2.



Gọi H là trung điểm cạnh BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

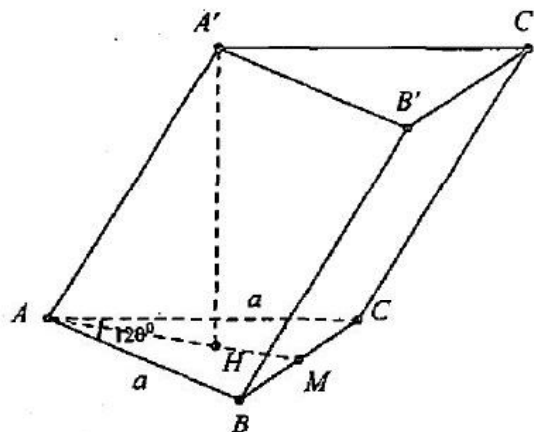
Trong tam giác vuông $A'HA$ ta có:

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ nên

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{8}$$

Bài 1.2.3.



Gọi H là tâm của đáy, M là trung điểm cạnh BC, ta có $SH \perp (ABC)$

$$\text{Ta có: } AM = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } HA = R = \frac{BC}{2 \sin 120^\circ} = a$$

$$\text{Suy ra } A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3}{4}.$$

Bài 1.2.4.

Gọi K là hình chiếu của A lên BD, H là hình chiếu của A lên A'K

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp AK \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AKA') \Rightarrow BD \perp AH$$

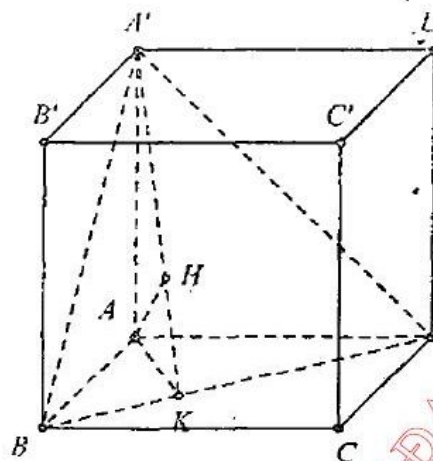
$$\text{Mà } AH \perp A'K \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

Trong tam giác vuông A'AK ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{A'A^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{8}{3a^3} \Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'A \cdot AB \cdot AD = \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}.$$



Bài 1.2.5. Đặt $A'A = 2x \Rightarrow CM = x$

Ta có: $B'M = \sqrt{B'C'^2 + C'M^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$;

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Và $AB' = \sqrt{4x^2 + a^2}$

Vì tam giác AMB' vuông tại M nên ta có: $B'A^2 = AM^2 + B'M^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + a^2 + x^2 = a^2 + 4x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$$

Do $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên

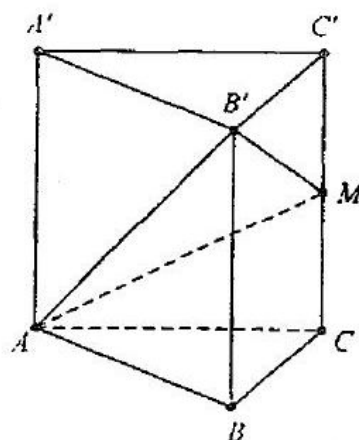
$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$$

Gọi $\alpha = (\angle(AMB'), (ABC))$. Vì hình chiếu của tam giác $AB'M$ trê
(ABC) là $\triangle ABC$

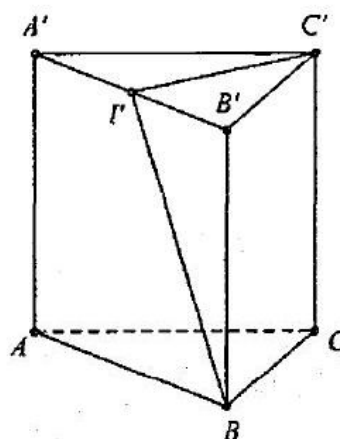
Nên ta có: $\cos \alpha = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMB'}}$

$$\begin{aligned} \text{Mà } S_{\triangle ABC} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_{\triangle AMB'} \\ &= \frac{1}{2} AM \cdot B'M = \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

nên $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Bài 1.2.6.



Gọi I' là trung điểm của $A'B'$, thì $C'I' \perp A'B'$ (do $\triangle ABC$ đều)

Mà $C'I' \perp AA' \Rightarrow C'I' \perp (ABB'A')$ suy ra $\widehat{I'BC'}$ là góc giữa BC' và $(ABB'A')$

$$\text{Suy ra } \widehat{I'BC'} = 30^\circ. \text{ Ta có } C'I' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BC' = \frac{C'I'}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle BCC' \text{ vuông: } CC'^2 = BC'^2 - BC^2 = 2a^2 \Rightarrow CC' = a\sqrt{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

Bài 1.2.7. Gọi O là tâm hình bình hành $ABB'A'$. Ta có $CO \perp (ABB'A')$.

Vì $CA = CB$ nên $OA = OB$, suy ra hình thoi $ABB'A'$ là hình vuông.

$$\text{Do đó: } OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } OC^2 = AC^2 - AO^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

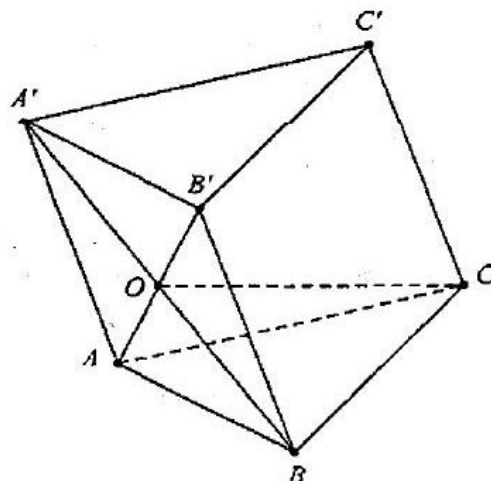
Vậy thể tích khối chóp

$$V_{C.ABA'} = \frac{1}{3} CO \cdot S_{ABA'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Mà } V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{C.ABA'},$$

nên thể tích khối lăng trụ

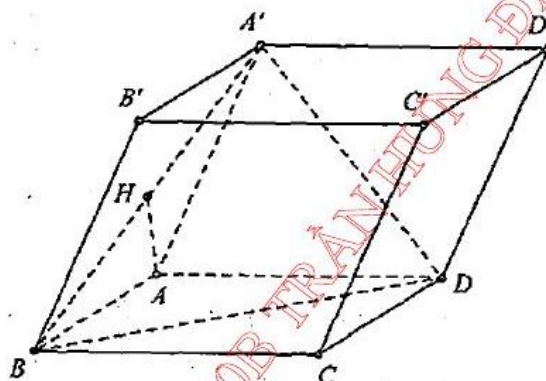
$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$



Bài 1.2.8. Từ giả thiết ta tính được $BD = a, A'B = a\sqrt{2}, A'D = a\sqrt{3}$ nên tam giác $A'BD$ vuông tại B . Vì $AB = AD = AA'$ nên hình chiếu của A lên mặt phẳng $(A'BD)$ trùng với tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$ (do tam giác đó vuông nên H là trung điểm của $A'D$).

Ta có $AH = A'A \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}, S_{A'BD} = \frac{1}{2} BA' \cdot BD = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$, do đó thể tích khối tứ diện $A'ABD$ là $V_{A'ABD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Ta đã biết $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'ABD}$, nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.



Bài 1.2.9.

1) Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$,

Vì $AA' \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(AA', (BCC'B')) = d(A, (BCC'B')) = AH = a$

Hạ $CK \perp AC'$, vì $AB \perp AC$ và

$AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp CK$

$\Rightarrow CK \perp (ABC') \Rightarrow CK = d(C, (ABC')) = b$.

Ta có $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow \widehat{CAC'}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC)

Suy ra $\widehat{CAC'} = \varphi$. Do $AC = \frac{CK}{\sin \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}, CC' = \frac{CK}{\cos \varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}$.

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} = \frac{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}{a^2 b^2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{ab^2}{2 \sin \varphi \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{b}{\cos \varphi} \frac{ab^2}{2 \sin \varphi \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{ab^3}{\sin 2\varphi \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

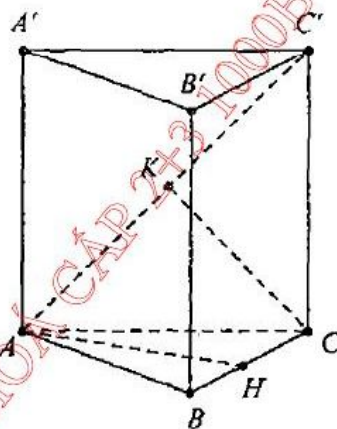
2) Khi $a = b \Rightarrow V = \frac{a^3}{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}$.

$$\text{Do } (\sin \varphi \cos^2 \varphi)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow \sin \varphi \cos^2 \varphi \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \geq \frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy khi $\varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì V đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài 1.2.10.

Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu của A' lên $(ABCD), AB, AD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A'H \perp AB \\ AI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow AB \perp HI$$

Tương tự: $HJ \perp AD$, hai tam giác vuông $A'AI$ và $A'AJ$ có

$$\begin{cases} AA' \text{ chung} \\ \widehat{A'AI} = \widehat{A'AJ} = 60^\circ \end{cases}$$

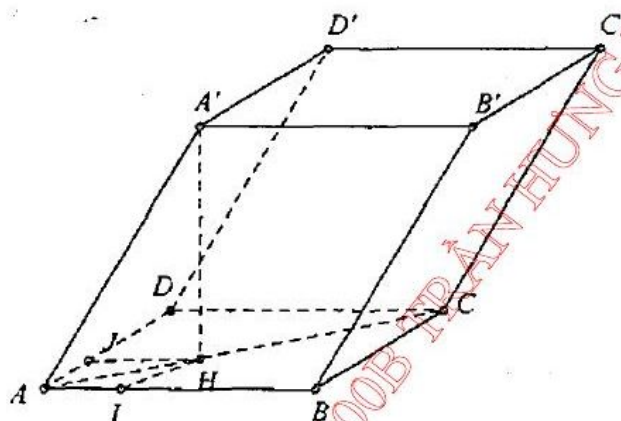
$$\Rightarrow \Delta A'AI = \Delta A'AJ. \text{ Mà } AI = AJ = AA' \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow HI = HJ.$$

Vậy H cách đều AB và AD nên nằm trên phân giác góc $\widehat{BAD}$, suy ra $H \in AC$.

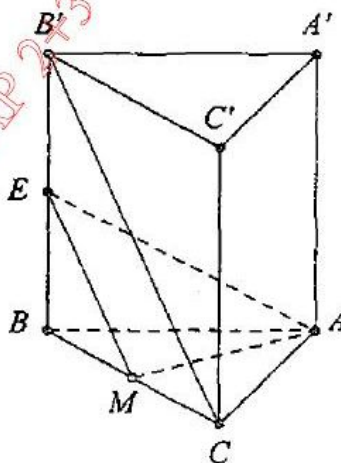
Ta có:

$$AH = \frac{AI}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$



Bài 1.2.11.



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

$$\text{Thể tích khối lăng trụ là: } V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 (\text{đvtt}).$$

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó mặt phẳng $(AME) \parallel B'C$ nên $d(AM, B'C) = d(B'C, (AME)) = d(C, (AME))$.

$$\text{Nhận thấy } d(C, (AME)) = d(B, (AME)) = h$$

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 1.2.12.

Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$$\text{và } AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

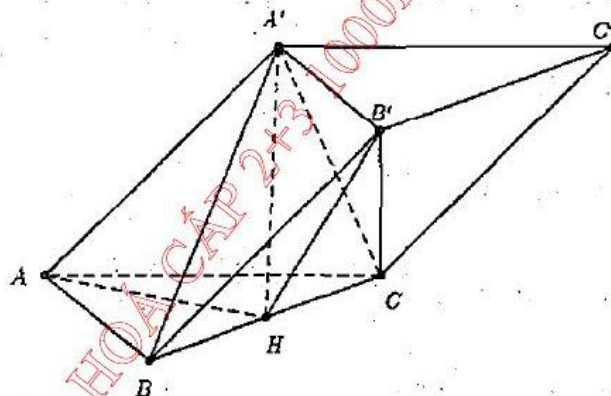
$$\text{Do đó } A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'HS_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt).}$$

Trong tam giác vuông A'B'H có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$

nên tam giác B'BH cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA'

và B'C' thì: $\varphi = \widehat{B'BH}$. Vậy $\cos \varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.



Bài 1.2.13.

Hạ $IH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$; IH là đường cao của tứ diện IABC

$$\Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}.$$

$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích tam giác ABC: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = a^2.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện IABC: } V = \frac{1}{3}IHS_{\Delta ABC} = \frac{4a^3}{9}.$$

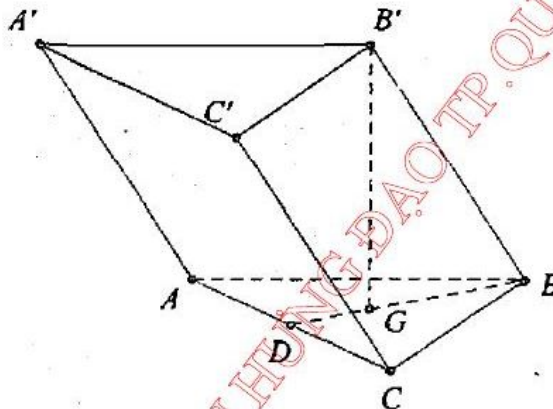
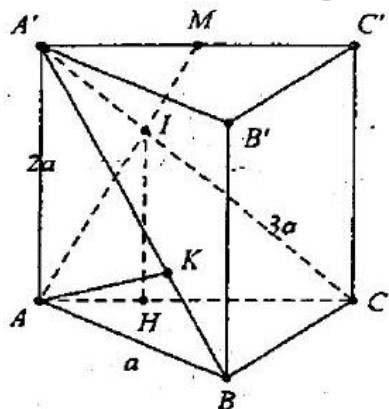
Hạ $AK \perp A'B (K \in A'B)$. Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên

$$AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC).$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK

$$AK = \frac{2S_{\triangle AA'B}}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 1.2.14.



Gọi D là trung điểm AC , G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^\circ \Rightarrow B'G = BB' \cdot \sin \widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}.$$

Trong $\triangle ABC$, ta có: $BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\triangle ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$$

Thể tích khối tứ diện $A'.ABC$:

$$V_{A'.ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9a^3}{208}.$$

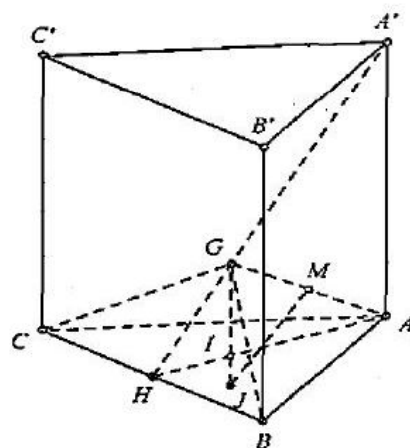
Bài 1.2.15.

Gọi H là trung điểm của BC , theo giả thuyết ta có: $\widehat{A'HA} = 60^\circ$

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3} \text{ và } AA' = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ: } V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt).}$$

Gọi I là tâm của tam giác ABC , suy ra $GI \parallel AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

$$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}.$$


Ta có: $AD \perp (AOI) \Rightarrow \widehat{A_1IO} = \widehat{((ADD_1, A_1), (ABCD))} = 60^\circ$

Vì $OI = \frac{a}{2}$, nên ta suy ra $A_1I = 2OI = a \Rightarrow A_1O = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1.O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

$$\text{Do } B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD) \Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD)) = CH$$

Ta có: $CH = \frac{CD \cdot CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(B_1, (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

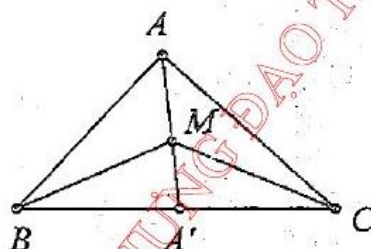
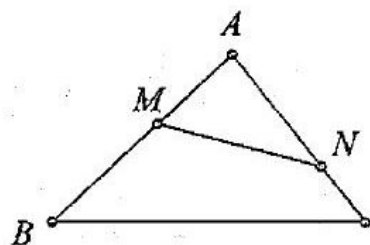
Chuyên đề 3. TỈ SỐ THỂ TÍCH

3.1. Phương pháp giải:

1) Tỉ số về diện tích: Cho tam giác ABC.

- Lấy các điểm M, N lần lượt trên các đường thẳng AB, AC thì

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

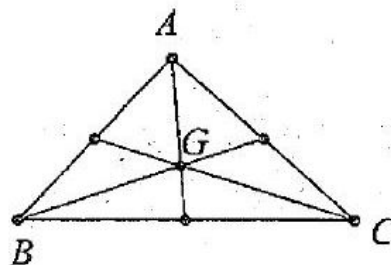
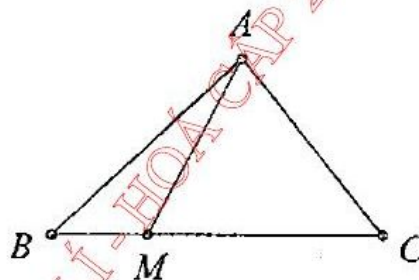


- Nếu điểm M nằm trong tam giác ABC, AM cắt BC tại A' thì:

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MA'}{MA}.$$

- Nếu điểm M nằm trên cạnh BC của tam giác ABC, thì

$$\frac{S_{BAM}}{S_{BAC}} = \frac{BM}{BC}, \frac{S_{CAM}}{S_{CAB}} = \frac{CM}{CB}.$$

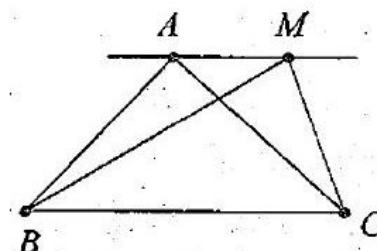
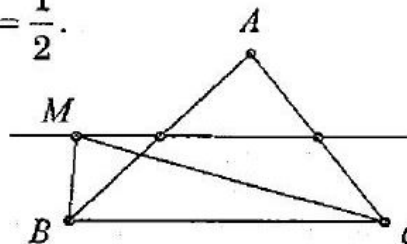


- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC, thì

$$S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

- Nếu M nằm trên đường trung bình ứng với cạnh BC, thì:

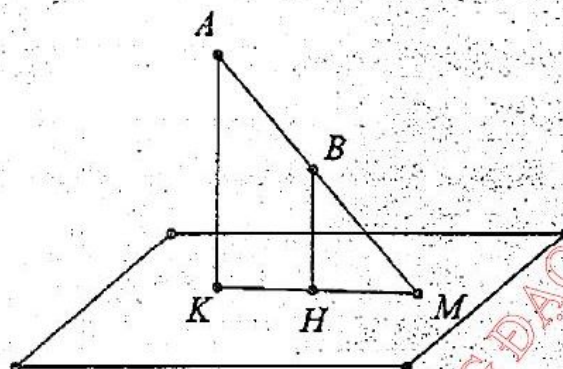
$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}.$$



- Nếu M nằm trên đường thẳng đi qua A và song song với BC, thì

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = 1.$$

2) Tỉ số về khoảng cách



- Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) ở điểm M thì:

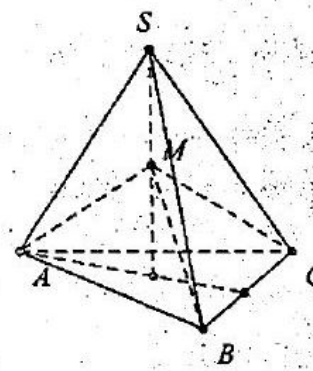
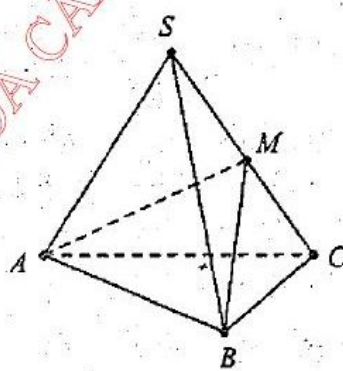
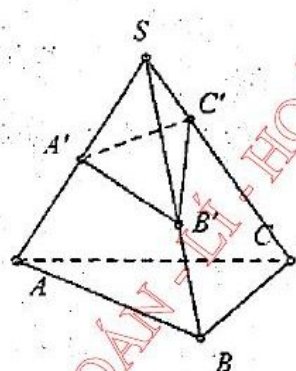
$$\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AM}{BM}.$$

- Đường thẳng Δ song song với một mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

3) Tỉ số về thể tích: Cho khối chóp tam giác S.ABC.

- Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' bất kỳ.

Ta có
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$



- Nếu M nằm trên cạnh SC thì
$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC}.$$

- Nếu M nằm trong hình chóp và SM cắt mặt phẳng (ABC) tại điểm

S' thì
$$\frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MS'}{SS'}.$$

3.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.3.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$.

Gọi M, N là các điểm thuộc SB, SC sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$, $\frac{SN}{SC} = x$.

- 1) Tính thể tích khối chóp $S.AMN$ theo a, x
- 2) Tìm x theo a để mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} \\ &= \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA \cdot AM \cdot SN}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2x}{3}$$

$$\text{Do đó: } V_{S.AMN} = \frac{2x}{3} V_{S.ABC} = \frac{2xa^3 \sqrt{3}}{9}$$

- 2) Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau

$$\Leftrightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Chú ý: Công thức tỉ số thể tích $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ chỉ áp dụng

cho hình chóp có đáy là tam giác, còn hình chóp có đáy là tứ giác thì chúng ta phải chia thành hai hình chóp tam giác.

Ví dụ 1.3.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên các cạnh SB, SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SB$, $SN = \frac{2}{3}SC$. Cạnh bên SA vuông góc với

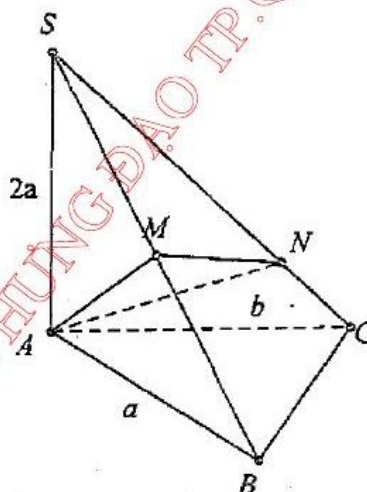
đáy. Một mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với SB cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng . Tính thể tích khối chóp $A.MNCB$.

Lời giải.

Đặt $SA = x > 0$.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại H, K . Ta có $SB \perp AH$

Mặt khác:



$$\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK.$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2} AH \cdot HK.$$

$$\text{Ta có: } AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Vì tam giác SBC vuông tại B nên HK // BC

$$\text{Suy ra } \frac{HK}{BC} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow HK = \frac{x^2 \cdot a\sqrt{3}}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Nên } S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2} AH \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{ax^2\sqrt{3}}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 x^3 \sqrt{3}}{2\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta AHK} = \frac{8a^2\sqrt{6}}{27} \text{ nên suy ra}$$

$$\frac{a^2 x^3 \sqrt{3}}{2\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = \frac{8a^2\sqrt{6}}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 9x^2 = 8a^2 + 8x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{2}{9} V_{S.ABC}$$

$$\text{Suy ra } V_{AMNCB} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{7}{9} V_{S.ABC} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{27}.$$

Ví dụ 1.3.4. Cho hình chóp S.ABC có SA = a, SB = 2a, SC = 3a và $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và d(B, (SAC)).

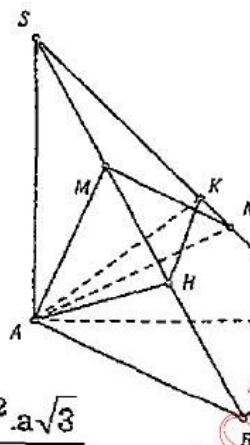
Lời giải.

Trên cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho SM = SN = a.

$$\text{Ta có: } AM = a, MN = \sqrt{SM^2 + SN^2} = a\sqrt{2}$$

$$AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos \widehat{ASN} = 3a^2 \Rightarrow AN = a\sqrt{3}$$

Vì $AN^2 = AM^2 + MN^2$ nên suy ra tam giác AMN vuông tại M.



Gọi H là trung điểm cạnh AN, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN

Suy ra $SH \perp (AMN)$.

Tam giác ASN cân tại S và $\widehat{ASN} = 120^\circ$ nên

$$\text{suy ra } SH = SA \cdot \cos \widehat{ASH} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot MN = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Nên thể tích khối chóp S.AMN là:

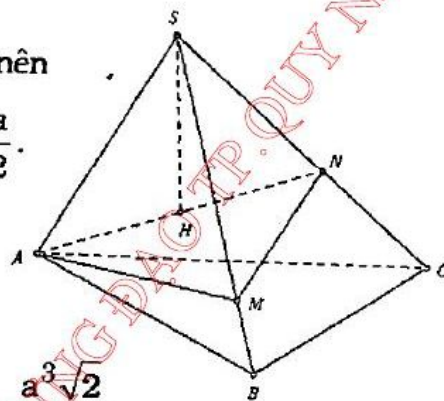
$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AMN}} = \frac{SB \cdot SC}{AM \cdot AN} = \frac{2a \cdot 3a}{a \cdot a} = 6 \Rightarrow V_{S.ABC} = 6V_{S.AMN} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} SA \cdot SC \cdot \sin \widehat{ASC} = \frac{1}{2} a \cdot 3a \cdot \sin 120^\circ = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } d(B, (SAC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$



Ví dụ 1.3.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD; M là giao điểm của SC với (AHK). Chứng minh rằng $SC \perp AM$ và tính thể tích khối chóp S.AHMK.

Lời giải.

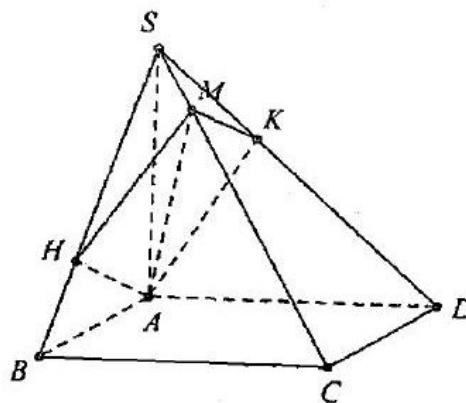
Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{3} SA \cdot AB \cdot AD = \frac{2a^3 \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Suy ra $V_{S.ABC} = V_{S.ACD}$

$$= \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$



Mặt khác $AH \perp SB$ nên suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $AK \perp SC$

Từ đó, suy ra $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp AM$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3}{7}; \quad \frac{SM}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{8}$$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có được:

$$\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{9}{32} \Rightarrow V_{S.AHM} = \frac{9}{32} V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$$

$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{9}{56} \Rightarrow V_{S.AKM} = \frac{9}{56} V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{56}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AHMK} = V_{S.AHM} + V_{S.AKM} = \frac{33a^3\sqrt{3}}{224}.$$

Chú ý. Ta có thể tính thể tích khối chóp $S.AHMK$ theo cách sau

$$V_{S.AHMK} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{AHMK}.$$

Chú ý: Ngoài cách tính trên, ta có thể tính trực tiếp với cách tính tương tự như ở ví dụ 1.2.3.

Ví dụ 1.3.5. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có M, N, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SC . Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (MNE) .

Lời giải.

Đường thẳng MN cắt BC và CD tại K và L ; EL cắt SD tại P ; EK cắt SB tại Q . Mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác $NMPEQ$.

Đặt $AB = a, SO = h$. Ta có $KB = DL = \frac{a}{2}$.

Hạ $EH \parallel SO \Rightarrow EH$ là đường trung bình của $\triangle SOC$ nên $EH = \frac{h}{2}$.

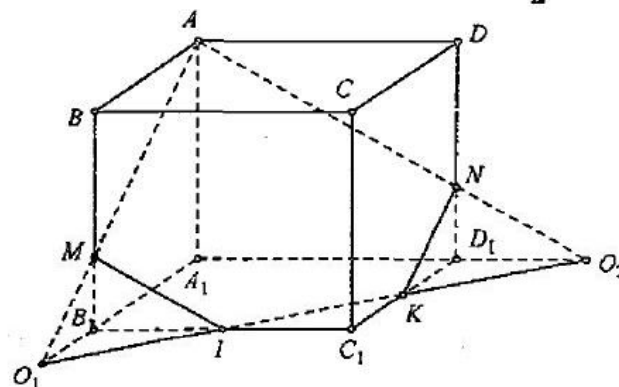
$$S_{\triangle CKL} = \frac{1}{2} CK \cdot CL = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{8};$$

$$V_{ECKL} = \frac{1}{3} EH \cdot S_{CKL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{9a^2}{8} = \frac{3a^2h}{16}$$

Ta có Q là trung điểm của EK nên

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$V_2 = V_{C_1BCDAMIKN} = a^3 - V_1 = \frac{47a^3}{72} \text{ và } k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}.$$



Ví dụ 1.3.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC , BD là tia phân giác trong của góc $\widehat{ADC}$, $BC = 3\text{cm}$, $SA = x (x > 0)$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi N là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (α) qua A, N song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, P .

- 1) Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$ biết $NC = 3NS$.
- 2) Tìm vị trí của điểm N trên cạnh SC sao cho (α) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Lời giải.

- 1) Xét hình thang $ABCD$ có BD là phân giác trong góc $\widehat{ADC}$ nên tam giác ABD cân tại A . Do đó $AB = AD = BC = 3\text{cm}$. Mặt khác $BD \perp BC$ nên đặt $\widehat{BDC} = \alpha$ thì $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 2\alpha$, suy ra $2\alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$. Vì thế $DC = 2BC = 6\text{cm}$.

Chiều cao của hình thang là y thì $y = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích của hình thang: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot y = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}x$.

Ta có $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{ACD} = 2S_{ACB} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$, do đó

$$V = V_{S.ABCD} = 3V_{S.ACB} = \frac{3}{2}V_{S.ACD}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ANM}}{V} + \frac{V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.ANM}}{3V_{S.ACB}} + \frac{2V_{S.ANP}}{3V_{S.ACD}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{SN}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} + 2 \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{SN}{SC} \left(\frac{SM}{SB} + 2 \frac{SP}{SD} \right).$$

Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = SO \cap AN$. Mặt phẳng (α) song song với BD nên M, P là giao của đường thẳng qua I , song song với BD và các cạnh SB, SD .

Do đó: $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO}$. Đặt $\frac{NS}{NC} = b \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{b}{b+1}$.

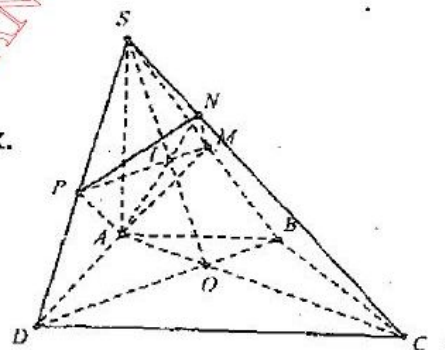
Xét tam giác SOI và đường thẳng AN ta có $\frac{AO}{AC} \cdot \frac{NC}{NS} \cdot \frac{IS}{IO} = 1$, do đó

$$\frac{IS}{IO} = 3b \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{3b}{3b+1} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{3b}{3b+1}.$$

Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{b+1} \left(\frac{3b}{3b+1} + 2 \cdot \frac{3b}{3b+1} \right) = \frac{3b^2}{(b+1)(3b+1)}.$

Với $\frac{NS}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ nên

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.AMNP} = \frac{9\sqrt{3}}{32} x.$$



2) Mặt phẳng (α) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}, \text{ hay } \frac{3b^2}{(b+1)(3b+1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3b^2 - 4b - 1 = 0.$$

Giải ra và kết hợp với điều kiện ta có $b = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$, hay $\frac{NS}{NC} = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

và điểm N nằm trên cạnh SC .

Ví dụ 1.3.8. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC theo thứ tự tại M, N . Gọi V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$; V là thể tích tứ diện $S.ABC$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

Lời giải.

Đặt $x = \frac{SM}{SB}$, $y = \frac{SN}{SC}$ ($0 \leq x, y \leq 1$).

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{S_{MSN}}{S_{ASB}} = xy$

$$\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMG} + S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMG}}{2S_{\Delta SBE}} + \frac{S_{\Delta SNG}}{2S_{\Delta SCE}}$$

$$= \frac{SM \cdot SG}{2SB \cdot SE} + \frac{SN \cdot SG}{2SC \cdot SE} = \frac{1}{3}(x + y) \quad (1)$$

Lại có: $\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{SM \cdot SN}{SA \cdot SB} = xy \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$xy = \frac{1}{3}(x + y) \Leftrightarrow (3x - 1)y = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{3x - 1} \quad \left(x \neq \frac{1}{3} \right).$$

Vậy $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x - 1} = f(x).$

Từ $\begin{cases} 0 \leq x, y \leq 1 \\ x + y = 3xy \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \text{ Xét } f(x) = \frac{x^2}{3x - 1}, x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Ta tìm được $\max_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{2} \cup x = 1$; $\min_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = \frac{4}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min \frac{V_1}{V} = \frac{4}{9}$; $\max \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$.

Bài 1.3.9. Cho O là một điểm nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh:

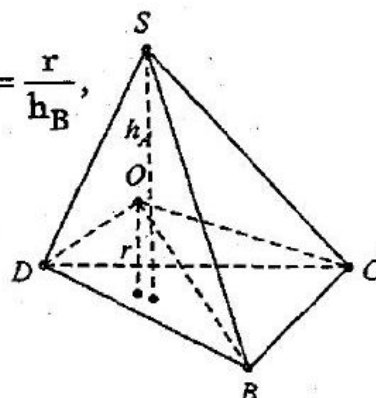
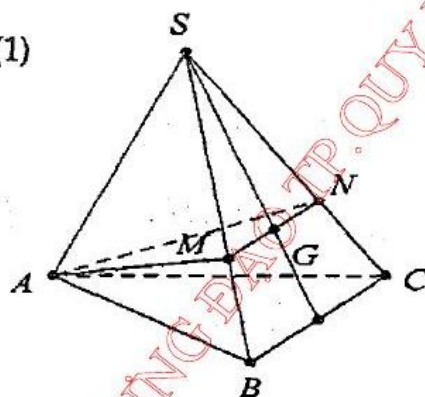
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}r \cdot S_{BCD}}{\frac{1}{3}h_A \cdot S_{BCD}} = \frac{r}{h_A}, \frac{V_{OACD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_B},$

$$\frac{V_{OABD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_C}, \frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_D}.$$

Suy ra: $\frac{r}{h_A} + \frac{r}{h_B} + \frac{r}{h_C} + \frac{r}{h_D}$



$$= \frac{V_{O.ABC} + V_{O.ABD} + V_{O.ACD} + V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = 1$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Chú ý:

- Bài toán trên là một ví dụ về ứng dụng thể tích để chứng minh các đẳng thức. Tương tự như diện tích đa giác, khi gặp các bài toán chứa các yếu tố là đường cao của một hình chóp ta có thể liên tưởng đến thể tích.
- Ta cũng có thể sử dụng thể tích để chứng minh các tỉ lệ đoạn thẳng bằng cách chuyển các tỉ lệ đoạn thẳng về cách tỉ lệ thể tích và chứng minh tỉ lệ thể tích đó. Công thức chúng ta hay sử dụng để chuyển là:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

Ví dụ 1.3.10. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N . Chứng minh

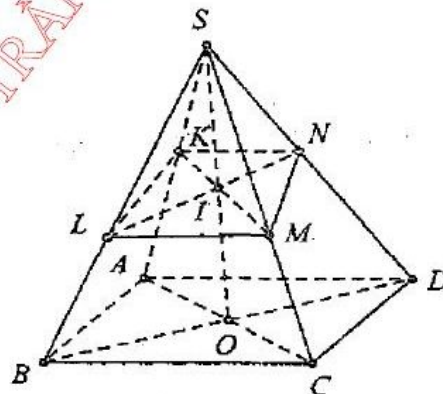
$$\text{rằng: } \frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{S.KMN} + V_{S.KML} \\ = V_{S.NLM} + V_{S.NLK} \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned} S_{ACD} = S_{ACB} = S_{ABD} = S_{CBD} \\ = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \end{aligned}$$



$$\text{Do đó } V_{S.ACD} = V_{S.ACB} = V_{S.ABD} = V_{S.CBD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy từ (1) ta suy ra: } \frac{V_{S.KMN}}{V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.KML}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.NLM}}{V_{S.DBC}} + \frac{V_{S.NLK}}{V_{S.DBA}}.$$

$$\Rightarrow \frac{SK \cdot SM \cdot SN}{SA \cdot SC \cdot SD} + \frac{SK \cdot SM \cdot SL}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SN \cdot SL \cdot SM}{SD \cdot SB \cdot SC} + \frac{SN \cdot SL \cdot SK}{SD \cdot SB \cdot SA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SK \cdot SL \cdot SM \cdot SN}{SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD} \left(\frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN} \right) = \frac{SK \cdot SL \cdot SM \cdot SN}{SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD} \left(\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN} \quad (\text{đpcm}).$$

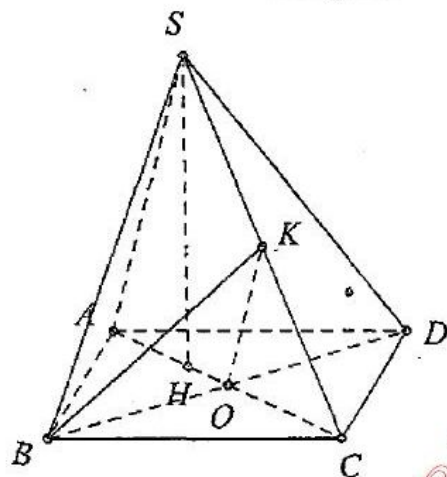
Chú ý: Ngoài ứng dụng thể tích để chứng minh các đẳng thức tỉ lệ, ta còn sử dụng thể tích để tính khoảng cách từ một điểm A đến mặt

phẳng (α) bằng cách: Xem A là đỉnh của một hình chóp đã biết thể tích và diện tích đáy, đồng thời đáy nằm trong mặt phẳng (α) . Khi đó:

$$d(A, (\alpha)) = \frac{3V}{S_d}.$$

Ví dụ 1.3.11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, SA lập với đáy góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Lời giải.



Ta có $V_{A.SBC} = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) \cdot S_{BCS}$ nên $d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH \perp (ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABCD) là AH nên $\widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{SAH} = \alpha$.

Ta có $\widehat{ASC} = 90^\circ$ nên $SA = AC \cdot \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot a \cdot \cos \alpha$,

Do đó $SH = SA \cdot \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

Nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 \cdot \cos \alpha \sin \alpha$.

Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC nên $OK \parallel SA \Rightarrow OK \perp SC$.

Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ nên $BK \perp SC$.

Ta có $SC = AC \cdot \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot a \cdot \sin \alpha$ nên

$$BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = a \sqrt{\frac{2 - \sin^2 \alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{BCS} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cdot \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d(A, (SBC)) = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 \cdot \cos \alpha \sin \alpha}{\frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos \alpha}{\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}$$

Ví dụ 1.3.12. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác ABD là tam giác đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, C'D'. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (AMN) biết rằng MN ⊥ B'D.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{z} = 0, \vec{y} \cdot \vec{z} = |\vec{y}| |\vec{z}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

Ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$.

Vì M, N là trung điểm của BC, C'D' nên

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} \text{ hay}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C'D'} = \frac{1}{2} \vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y}$$

Theo bài ra MN ⊥ B'D nên $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB'} = 0$

$$\text{Do đó } (\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\text{Ta có: } d(D, (AMN)) = \frac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$$

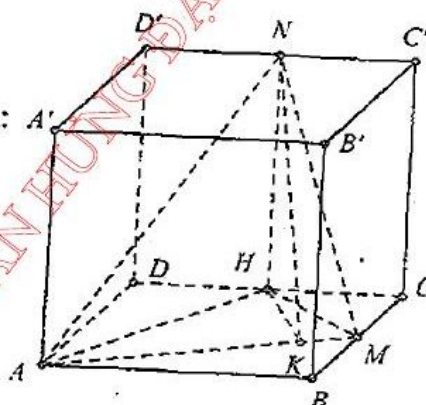
$$\text{Để thấy } S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Gọi H là trung điểm của DC thì NH ⊥ (ABCD), NH = $\frac{\sqrt{2}}{2} a$ nên

$$V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \frac{1}{3} NH \cdot S_{AMD} = \frac{\sqrt{6}}{24} a^3$$

Kẻ HK ⊥ AM ta có NK ⊥ AM. Theo định lí hàm số cosin

$$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = \frac{7}{4} a^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2} a$$



$$\text{Ta có } S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \frac{3}{8} S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{16} a^2$$

$$\text{Nên } HK = \frac{2S_{AHM}}{AM} = \frac{3\sqrt{21}}{28} a \Rightarrow NK = \sqrt{NH^2 + HK^2} = \frac{\sqrt{231}}{14} a.$$

$$\text{Suy ra } S_{AMN} = \frac{1}{2} NK \cdot AM = \frac{\sqrt{33}}{8} a^2, \text{ do đó } d(D, (AMN)) = \frac{\sqrt{22}}{11} a.$$

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11} a$.

3.3. Bài tập vận dụng

Bài 1.3.1. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB, SC.

- 1) Chứng minh rằng $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}$ không phụ thuộc vào độ lớn α .
- 2) Tính a theo b, c biết rằng mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.
- 3) Tính thể tích của khối chóp S.AMN.

Bài 1.3.2. Tính thể tích của khối tứ diện ABCD biết

- 1) $AB = a, AC = b, AD = c, \widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$.
- 2) $AB = a, AC = b, AD = c, \widehat{BAC} = 120^\circ, \widehat{CAD} = 60^\circ$ và $\widehat{DAB} = 90^\circ$.

Bài 1.3.3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, các mặt bên nghiêng đều trên đáy một góc φ . Mặt phẳng (α) qua AC, vuông góc với mặt phẳng (SAB) chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích của mỗi phần theo a và φ .

Bài 1.3.4. Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số $\frac{AQ}{AD}$ và tỷ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 1.3.5. Cho tứ diện ABCD và M là một điểm trong tứ diện. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) tương ứng tại các điểm A', B', C', D'. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của các tứ diện ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh rằng: $\frac{V'}{V} \leq \frac{1}{27}$.

Bài 1.3.6. Cho hình chóp tam giác S.ABC và M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng đi qua M và song song với SA, SB, SC lần

lượt cắt các mặt (BCS), (CAS), (ABS) tại A' , B' , C' . Chứng minh rằng: $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$.

Bài 1.3.7. Cho tứ diện SABC có $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện SABC, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}.$$

Bài 1.3.8. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự nằm trong các đoạn GA, GB, GC, GD. Gọi A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự là giao của GA với mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$, của GB với $(C_1D_1A_1)$, của GC với $(D_1A_1B_1)$, của GD với $(A_1B_1C_1)$. Chứng minh

$$\text{rằng: } 3 \left(\frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \right) = \frac{GA}{GA_2} + \frac{GB}{GB_2} + \frac{GC}{GC_2} + \frac{GD}{GD_2}.$$

b) Hướng dẫn giải

Bài 1.3.1.

$$1) \text{ Ta có } \frac{V_{S\Delta MN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}.$$

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AM

$$\text{nên } \frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.$$

$$\text{Nhưng } SB^2 = SA^2 + AB^2$$

$$\text{do đó } \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{a^2}{a^2 + c^2}, \text{ nên}$$

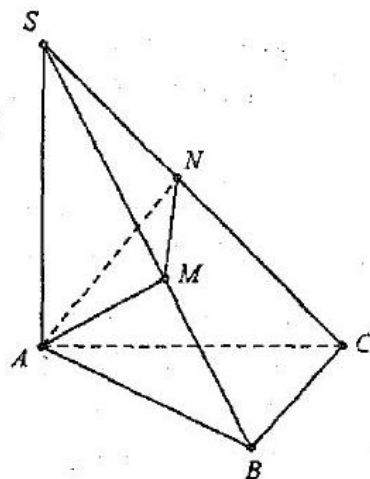
$$\frac{V_{S\Delta MN}}{V_{SABC}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + c^2} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai khối chóp S.AMN và S.ABC không phụ thuộc vào độ lớn của góc α .

2) Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng

$$\text{nhau, tức là } \frac{V_{S\Delta MN}}{V_{SABC}} = \frac{1}{2}, \text{ do đó } \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} = \frac{1}{2}. \text{ Hay là:}$$

$$2a^4 = (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) \Leftrightarrow a^4 - (b^2 + c^2)a^2 - b^2c^2 = 0$$



$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{b^2 + c^2 \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 + 4b^2c^2}}{2}$$

$$\text{Vì } a > 0, a^2 > 0 \text{ nên } a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + \sqrt{(b^2 + c^2)^2 + 4b^2c^2}}{2}}$$

3) Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} abc \cdot \sin \alpha$.

Thể tích khối chóp $S.AMN$ là

$$V_{SAMN} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \cdot V_{SABC} = \frac{a^5 bc \cdot \sin \alpha}{6(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$$

Bài 1.3.2. Giả sử $a = \min(a, b, c)$.

Trên các cạnh AC, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$$AM = AN = AB = a$$

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, nên tứ diện $ABMN$ là tứ diện đều cạnh a .

Gọi I là trung điểm MN , H là hình chiếu của A trên mặt phẳng

$$(BCD) \text{ thì } BI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ nên } BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_{ABMN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Mà } \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AC} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{a^2}{bc} \text{ nên } V_{ABCD} = \frac{bc}{a^2} V_{ABMN} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$$

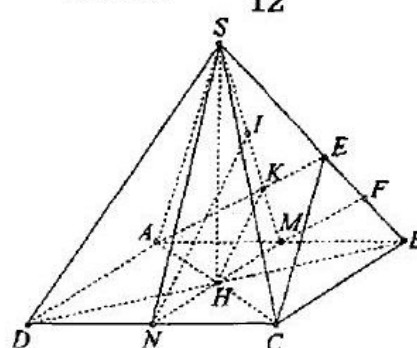
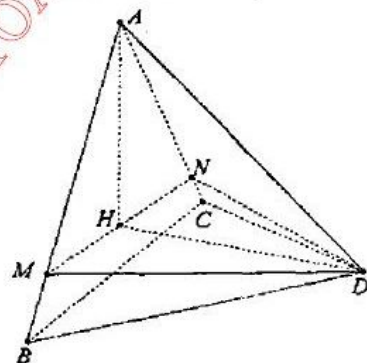
2) Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = AN = AD$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{A.BCD}}{V_{A.MND}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} = \frac{bc}{a^2}.$$

$$\text{Mặt khác, ta tính được } V_{A.MND} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Nên thể tích của khối tứ diện } ABCD \text{ là } V_{A.MND} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$$

Bài 1.3.3.



Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, BD. Mặt phẳng (SMN) vuông góc với AB $\Rightarrow$ (SMN) $\perp$ (SAB). - Hạ NJ $\perp$ SM thì NJ $\perp$ (SAB), nên (α) chứa AC và song song với NJ. Kẻ HK $\perp$ SM và AK $\cap$ SB = E thì thiết diện là tam giác ACE.

Gọi $V = V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC}$, $V_1 = V_{ABCE}$, $V_2 = V - V_1$.

Ta có $\widehat{SMH} = \varphi$ nên chiều cao của khối chóp SH = HM $\tan \varphi = \frac{a}{2} \cdot \tan \varphi$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} a^3 \tan \varphi$.

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{V_1}{2V_{S.ABC}} = \frac{BE}{2BS}$. Kẻ MF $\parallel$ AE, ta có

$$\frac{EB}{ES} = \frac{EB}{EF} \cdot \frac{EF}{ES} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{KM}{KS} = 2 \cdot \frac{HK \cdot \cot \varphi}{HK \cdot \tan \varphi} = \frac{2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BS} = \frac{2 \cos^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \Rightarrow V_1 = \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} V.$$

$$\text{Vì thế } V_1 = \frac{a^3 \sin 2\varphi}{3(1 + \cos^2 \varphi)}, V_2 = V - V_1 = \frac{a^3 \sin \varphi}{6 \cos \varphi (1 + \cos^2 \varphi)}.$$

Bài 1.3.4. Gọi E là giao điểm của MN và CD. Khi đó Q là giao điểm của PE và AD. Gọi G là điểm thuộc cạnh AC sao cho DG $\parallel$ PQ và F là trung điểm của BC thì M là trung điểm của BF suy ra MN $\parallel$ FD.

$$\text{Ta có: } \frac{AG}{AP} = 1 + \frac{PG}{AP} = 1 + \frac{2PG}{PC} = 1 + \frac{2ED}{EC} = 1 + \frac{2MF}{MC} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AQ}{AD} = \frac{AP}{AG} = \frac{3}{5}.$$

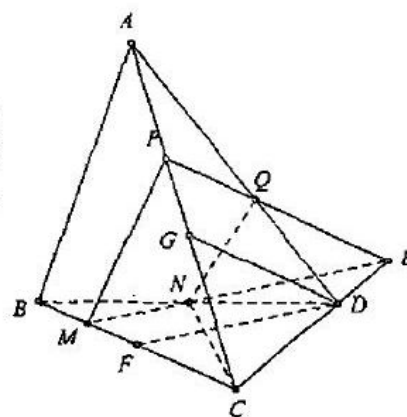
Gọi V là thể tích khối tứ diện ABCD, V_1 là thể tích khối đa diện ABMNQP, V_2 là thể tích khối đa diện CDMNPQ. Khi đó $V_2 = V - V_1$.

$$\text{Ta có } V_1 = V_{ABMN} + V_{AMPN} + V_{APQN}.$$

$$\text{Do } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}, \frac{BN}{BD} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BD} = \frac{1}{8}, \frac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \frac{3}{8}, \frac{S_{DNC}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2}.$$

$$V_{ABMN} = \frac{1}{8} V, V_{AMNP} = \frac{1}{3} V, V_{APQN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} V_{ADNC} = \frac{1}{10} V.$$



$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{7}{20}V \Rightarrow V_2 = \frac{13}{20}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{13}.$$

Bài 1.3.5.

Gọi $P = AD \cap DA'$, $P \in BC$, $Q = BD \cap DB'$, $Q \in AC$, $R = CD \cap DC'$, $R \in AB$.

$$\text{Đặt } x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BM}{BB'}, z = \frac{CM}{CC'}, t = \frac{DM}{DD'}$$

Gọi $v_1, v_2, v_3, v_4, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4$ lần lượt là thể tích các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC, MB'C'D', MC'D'A', MD'A'B'$ và $MA'B'C'$.

$$\text{Ta có: } \frac{v'_1}{v_1} = \frac{MB'}{MB} \cdot \frac{MC'}{MC} \cdot \frac{MD'}{MD} = \frac{1-y}{y} \cdot \frac{1-z}{z} \cdot \frac{1-t}{t} \quad (1) \text{ và } \frac{v_1}{V} = 1-x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{v'_1}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{yzt} \quad (3)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức tương tự:

$$\frac{v'_2}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xzt} \quad (4)$$

$$\frac{v'_3}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{ytx} \quad (5)$$

$$\frac{v'_4}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyz} \quad (6)$$

Cộng các đẳng thức (3), (4), (5) và (6) theo vế ta được

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sum v'_i}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyzt} (x+y+z+t)$$

$$\text{Vì } \frac{\sum v_i}{V} = 1 \Rightarrow x+y+z+t = 3 \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{V'}{V} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyzt}$$

$$\text{Ta có: } (1-x)(1-y)(1-z) \leq \left(\frac{1-x+1-y+1-z}{3} \right)^3 = \frac{x^3}{27}$$

Tương tự cho ba bất đẳng thức còn lại và nhân chúng theo vế ta thu

$$\text{được } \left[\frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyzt} \right]^3 \leq \left(\frac{1}{81} \right)^3$$

$$\text{Suy ra } \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyzt} \leq \frac{1}{81}$$

Vậy $\frac{V'}{V} \leq \frac{1}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=t=\frac{3}{4} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Bài 1.3.6.

Gọi N là giao điểm của MA và BC. Khi đó S, A', N thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SA, A'M).

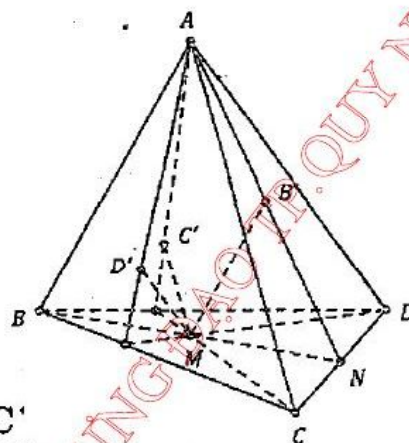
Gọi MM_1 và AA_1 là các đường vuông góc hạ từ M và A xuống

$$\text{mp(SBC) thì: } \frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MN}{AN} = \frac{MA'}{SA}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} &= \frac{V_{M.BCS}}{V_{A.BCS}} = \frac{\frac{1}{3} S_{BCS} \cdot MM_1}{\frac{1}{3} S_{BCS} \cdot AA_1} \\ &= \frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MA'}{SA} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MC'}{MC}$$

$$\text{Cộng các đẳng thức trên ta thu được } \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1.$$



Bài 1.3.7.

Gọi G' là giao điểm của SG với (ABC) thì G' là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$V_{SG'AB} = V_{SG'BC} = V_{SG'CA} = \frac{1}{3} V_{SABC}.$$

$$\text{Ta có } \frac{SG}{SG'} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SGDE}}{V_{SG'AB}} = \frac{SG \cdot SD \cdot SE}{SG' \cdot SA \cdot SB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{SD \cdot SE}{SA \cdot SB}$$

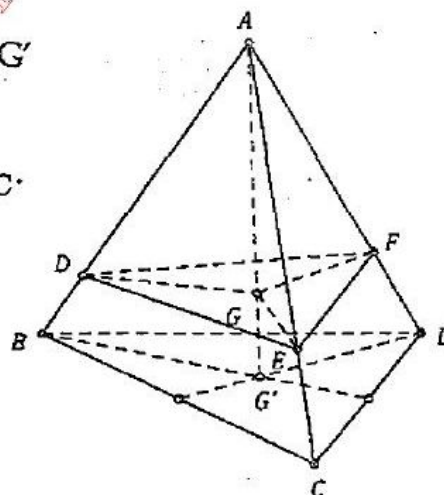
$$\Rightarrow \frac{V_{SGDE}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SD \cdot SE}{SA \cdot SB}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{V_{SGEF}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SE \cdot SF}{SA \cdot SC}, \frac{V_{SGFD}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SF \cdot SD}{SA \cdot SC}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{SDEF}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} (SD \cdot SE + SE \cdot SF + SF \cdot SD)$$

$$\Leftrightarrow 4SD \cdot SE \cdot SF = SD \cdot SE + SE \cdot SF + SF \cdot SD \Leftrightarrow \frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = 4.$$

Áp dụng Bất đẳng thức: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ ta có



$$\left(\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD} \leq \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max\left(\frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}\right) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow SD = SE = SF = \frac{3}{4}.$$

Bài 1.3.8. Gọi A_3 là giao điểm của AG và (BCD) thì A_3 là trọng tâm tam

giác BCD , do đó $V_{GA_3BC} = V_{GA_3BD} = V_{GA_3CD} = \frac{1}{3} V_{GBCD}$

$$\text{Vì } \frac{V_{GB_1C_1D_1}}{V_{GBCD}} = \frac{GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GB \cdot GC \cdot GD} \quad (1), \text{ mặt khác } \frac{V_{GB_1C_1A_2}}{V_{GBCA_3}} = \frac{GA_2}{GA_3} \cdot \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{GB_1C_1A_2}}{V_{GBCD}} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC} \quad (2)$$

Chúng minh tương tự ta được:

$$\frac{V_{GC_1D_1A_2}}{V_{GBCD}} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GC_1 \cdot GD_1}{GC \cdot GD} \quad (3); \quad \frac{V_{GD_1B_1A_2}}{V_{GBCD}} = \frac{GA_2}{GA} \cdot \frac{GD_1 \cdot GB_1}{GD \cdot GB} \quad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3) và (4) và đối chiếu với (1) suy ra

$$\frac{GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GB \cdot GC \cdot GD} = \frac{GA_2}{GA} \left(\frac{GC_1 \cdot GD_1}{GC \cdot GD} + \frac{GD_1 \cdot GB_1}{GD \cdot GB} + \frac{GB_1 \cdot GC_1}{GB \cdot GC} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{GA}{GA_2} = \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \quad (5)$$

Chúng minh tương tự ta cũng có:

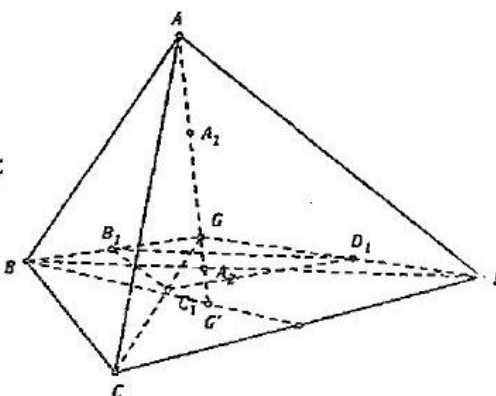
$$\frac{GB}{GB_2} = \frac{GA}{GA_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \quad (6);$$

$$\frac{GC}{GC_2} = \frac{GB}{GB_1} + \frac{GA}{GA_1} + \frac{GD}{GD_1} \quad (7)$$

$$\frac{GD}{GD_2} = \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GA}{GA_1} \quad (8)$$

$$\text{Cộng (5), (6), (7) và (8) ta được: } 3 \left(\frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \right)$$

$$= \frac{GA}{GA_2} + \frac{GB}{GB_2} + \frac{GC}{GC_2} + \frac{GD}{GD_2}.$$



Chương 2. MẶT TRÒN XOAY – MẶT CẦU

Chuyên đề 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH VÀ THIẾT DIỆN CỦA KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ

1.1. Phương pháp giải:

1) Khối nón:

- Phải xác định được bán kính, đường cao hoặc đường sinh, hoặc góc ở đỉnh của hình nón.
- Thiết diện qua đỉnh hình nón là một tam giác cân.
- Thiết diện vuông góc với trục hình nón là một hình tròn.

2) Khối trụ

- Phải xác định được chiều cao h và bán kính R của hình trụ.
- Nếu thiết diện của hình trụ song song hoặc chứa trục của hình trụ thì thiết diện đó là hình chữ nhật.
- Nếu thiết diện của hình trụ vuông góc với trục hình trụ thì thiết diện đó là hình tròn.

1.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1.1. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a .

- 1) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón.
- 2) Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích thiết diện này.

Lời giải.

- 1) Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB . Theo bài ra ta có $\triangle SAB$ là tam giác vuông cân tại S .

$$\text{Ta có } l = SA = a; AB = 2r = \sqrt{2}SB = \sqrt{2}a \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần của hình nón là: } S_{tp} = \pi r(r + l) = \frac{(a\sqrt{2} + 1)\pi a}{2}.$$

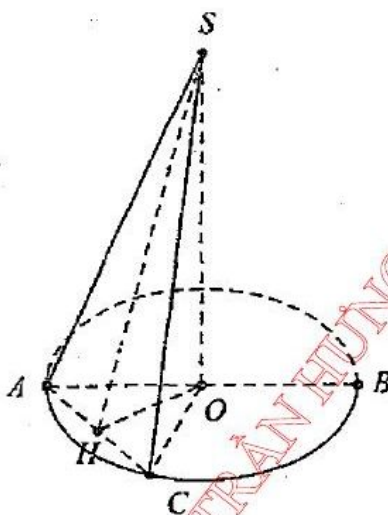
$$\text{Thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

- 2) Xét thiết diện qua đỉnh S tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° là $\triangle SAC$. Gọi H là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có: } AC \perp OH, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ.$$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}a}{3}, AC = 2AI = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện là: } S_{SAC} = \frac{1}{2} SH \cdot AC = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}.$$



Ví dụ 2.1.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho với bán kính đáy là r , góc giữa đường sinh và đáy hình nón là β .

- 1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.
- 2) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp.

Lời giải.

Gọi I là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC với cạnh BC ; $\widehat{SIO} = \beta$; $h = SO = r \tan \beta$, $l = SI = \frac{r}{\cos \beta}$.

$$1) \text{ Diện tích xung quanh hình nón } S_{hn} = \pi r l = \frac{\pi r^2}{\cos \beta}.$$

$$\text{Thể tích hình nón } V_{kn} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi r^3 \tan \beta}{3}.$$

$$2) \text{ Ta có } AC = \sqrt{3}AB, BC = 2AB; S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}AB^2}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AB + AC + BC)r = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} AB \cdot r \Rightarrow AB = (\sqrt{3} + 1)r.$$

Diện tích xung quanh hình chóp

$$S_{hc} = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) \cdot SI = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})r^2}{\cos \beta}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{kc} = \frac{1}{3} SO.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})r^3 \tan \beta}{3}.$$

Ví dụ 2.1.3. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.

- 1) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối trụ.
- 2) Tính thể tích khối trụ.
- 3) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Lời giải.

- 1) Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = 2R$.

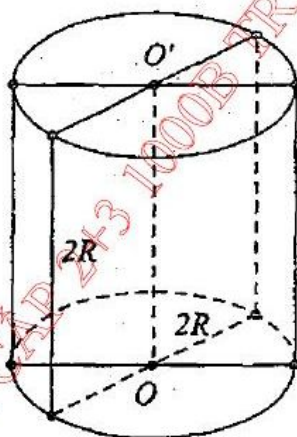
$$\text{Diện tích xung quanh là } S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2 \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần là: } S_{tp} = 2\pi R(R + h) = 6\pi R^2 \text{ (đvdt)}.$$

- 2) Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = 2\pi R^3$ (đvtt).

- 3) Do khối lăng trụ nội tiếp là tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}R$.

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ là } V = Bh = 4R^3 \text{ (đvtt)}.$$



Ví dụ 2.1.4. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A. Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

Lời giải.

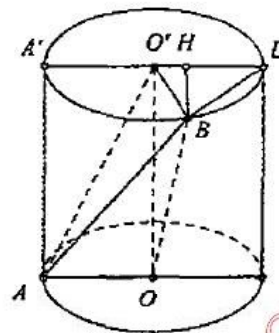
Kẻ đường sinh AA' , gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên A'D.

$$\text{Ta có } BH \perp (AOO'A') \text{ nên } V = \frac{1}{3} BH.S_{AOO'}.$$

$$\text{Ta có } A'B = \sqrt{3}a, BD = a, \text{ tam giác } BO'D \text{ đều suy ra } BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Mặt khác $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$ nên suy ra

Thể tích tứ diện $OO'AB$ là $V_{OO'AB} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.



Ví dụ 2.1.5. Một hình trụ có diện tích toàn phần bằng 6π . Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ sao cho thể tích của khối trụ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $x, y > 0$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Khi đó: $6\pi = 2\pi x^2 + 2\pi xy \Rightarrow y = \frac{3 - x^2}{x}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi x^2 y = \pi x(3 - x^2)$

Xét hàm số $f(x) = x(3 - x^2)$, có $f'(x) = 3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Từ đó ta tìm được $\max f(x) = f(1) = 2$ nên $\max V = 2\pi$ đạt được khi $x = 1, y = 2$.

Ví dụ 2.1.6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm của tam giác BCD , dựng mặt phẳng (α) vuông góc với AO tại một điểm I thuộc đoạn AO . Mặt phẳng (α) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P . Một hình trụ có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác MNP và đáy kia nằm trên mặt phẳng (BCD) . Xác định vị trí của điểm I trên đoạn AO để khối trụ đó có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên $AO \perp (BCD)$.

Ta có $BO = \frac{2}{3}BF = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ và $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

Đặt $AI = x$. Do $(\alpha) \perp AO$ nên MNP đồng dạng với tam giác ABC , do

đó $\frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AO}$. Hay $MN = \frac{\sqrt{6}}{2}x$.

Tam giác MNP là tam giác đều, nên gọi r là bán kính đường tròn nội

tiếp tam giác thì $r = \frac{1}{3}ME = \frac{\sqrt{3}}{6}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}x$.

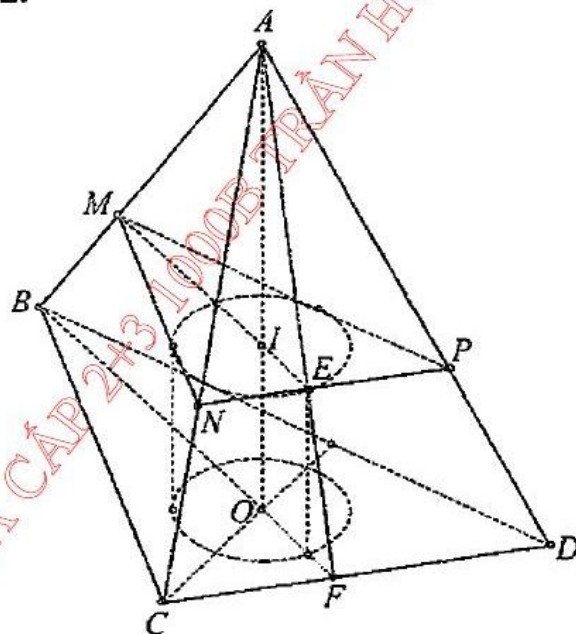
Thể tích khối trụ là: $V = IO.S_d = (AO - IA). \pi r^2 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a - x \right) x^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$V = \frac{\pi}{16} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} a - 2x \right) x \cdot x \leq \frac{\pi}{16} \left(\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3} a - 2x + x + x}{3} \right)^3 = \frac{\pi\sqrt{6}}{243} a^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{2\sqrt{6}}{3}a - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{9}a \Leftrightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{2}{3}$.

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất là $\frac{\pi\sqrt{6}}{243}a^3$, đạt được khi điểm I chia đoạn AO theo tỉ số -2 .



Ví dụ 2.1.7. Cho hình nón N có đỉnh S và đường tròn đáy tâm O . Tồn tại một hình chóp $M.ABC$ có tam giác ABC với $AB = AC, \widehat{BAC} = 30^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O) , điểm M thuộc đường sinh và hình chiếu H của M trên mặt đáy là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số thể tích khối chóp và thể tích khối nón.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC, D đối xứng của A qua O. Tam giác ABC cân tại A nên tâm đường tròn nội tiếp H nằm trên đoạn AE. Vì $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ và HB là phân giác nên $\widehat{HBC} = \widehat{HBA}$, nên

$\widehat{HBD} = \widehat{BHD}$, do đó $HD = BD = AD \cdot \sin 15^\circ < \frac{AD}{2}$, hay $HD < OD \Rightarrow H$

nằm trong đoạn OE , vì thế M nằm trên đường sinh SD .

Gọi V_c, V_n lần lượt là thể tích khối chóp, khối nón. Ta có

$$V_c = \frac{1}{3} MH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{12} MH \cdot AB^2, V_n = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO$$

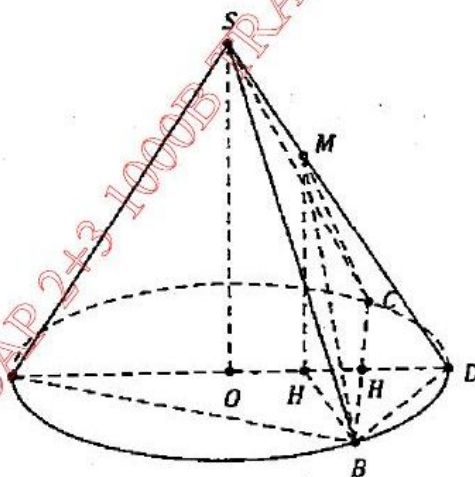
$$\text{Do đó } \frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AB^2}{OA^2} \cdot \frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AD^2 \cdot \cos^2 15^\circ}{OA^2} \cdot \frac{DH}{DO}$$

$$\text{Mà } DO = \frac{1}{2} AD, HD = BD \text{ nên } \frac{DH}{DO} = \frac{2DB}{AD} = 2 \sin 15^\circ, \text{ do đó}$$

$$\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AB^2}{OA^2} \cdot \frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi} \cdot 4 \cos^2 15^\circ \cdot 2 \sin 15^\circ = \frac{1}{2\pi} \cos 15^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_c}{V_n} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8\pi}.$$



Ví dụ 2.1.8. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao của hình trụ là h . AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O') .

- 1) Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- 2) Gọi N là điểm đối xứng với M qua O' . Tìm vị trí của MN sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.
- 3) Tính thể tích khối lăng trụ n – giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.

Lời giải.

- 1) Dựng các đường sinh MH, AA', BB' . Kẻ $HK \perp AB$ thì $MK \perp AB$.

$$\text{Ta có: } MK^2 = MH^2 + HK^2 = h^2 + HK^2$$

Nên $S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MK$ hay $S_{MAB} = R \cdot \sqrt{h^2 + HK^2}$.

Vì $0 \leq HK \leq R$ nên $Rh \leq S_{MAB} \leq R \cdot \sqrt{h^2 + R^2}$.

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A' hoặc M trùng B' .

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2 + R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM \perp A'B'$.

- 2) Ta có $HK \perp AB, HK \perp O'O$ nên $HK \perp (ABO')$.

Do đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABO') là HK .

Vì M, N đối xứng với nhau qua O' nên khoảng cách từ M, N đến $A'B'$ bằng nhau. Do đó $V_{ABMN} = V_{ABMO'} + V_{ABNO'} = 2V_{ABMO'}$.

Ta có $V_{ABMO'} = \frac{1}{3} HK \cdot S_{ABO'} = \frac{1}{3} h \cdot R \cdot HK$ và $HK \leq R$ nên

$$V_{ABMN} = \frac{2}{3} hR \cdot HK \leq \frac{2}{3} hR^2.$$

Do đó V_{ABMN} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2}{3} hR^2$ khi $MN \perp A'B'$.

- 3) Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ là đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$.

• Đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là

$$S_{A_1A_2 \dots A_n} = nS_{A_1OA_2} = \frac{n}{2} \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin \widehat{A_1OA_2} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

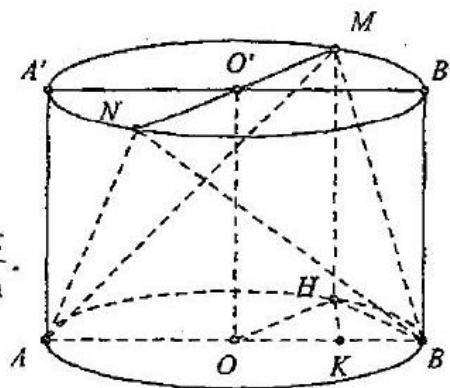
Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt} = h \cdot S_{A_1A_2 \dots A_n} = \frac{n}{2} hR^2 \sin \frac{2\pi}{n}$.

• Đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ thì cạnh của đa giác là $2R \tan \frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là

$$S_{A_1A_2 \dots A_n} = nS_{A_1OA_2} = nR^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là

$$V_{lt.ngt} = h \cdot S_{A_1A_2 \dots A_n} = n hR^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$



1.3. Bài tập vận dụng

a) Đề bài

Bài 2.1.1. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ, \widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Bài 2.1.2. Cho hai điểm cố định A, B có $AB = a$. Với mỗi điểm C trong không gian sao cho tam giác ABC đều, kí hiệu AD là đường cao của tam giác ABC . Trong mặt phẳng chứa d và AD , xét đường tròn đường kính AD . Gọi S là một giao điểm của đường tròn này với đường thẳng d .

- 1) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
- 2) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì điểm S thuộc một đường tròn cố định và mỗi đường thẳng SA, SB thuộc một mặt nón cố định.

Bài 2.1.3. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng R , góc ở đỉnh là 2α với $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

- 1) Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón.
- 2) Tìm diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.
- 3) Xét hai điểm M, N thay đổi trên đáy sao cho góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy hình nón bằng β . Chứng minh rằng đường thẳng SI với I là trung điểm MN luôn thuộc một mặt nón cố định.

Bài 2.1.4. Bên trong hình trụ có một hình vuông $ABCD$ cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh A, B nằm trên đường trong đáy thứ nhất, hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy một góc 45° . Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ.

Bài 2.1.5. Một hình nón có hai đáy là $(O; R), (O'; R)$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

- 1) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ,
- 2) Tính thể tích khối trụ tương ứng,
- 3) Tính thể tích khối lăng trụ đứng tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp khối trụ (trong đó các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ nội tiếp (O) và (O')),

- 4) Lấy M là một điểm bất kì trên đường tròn $(O'; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAC khi M thay đổi trên $(O'; R)$,
- 5) Gọi N là điểm đối xứng với M qua O' . Xác định vị trí MN sao cho thể tích của tứ diện $ACMN$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó.

Bài 2.1.6. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao của hình trụ là h , AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O') .

- 1) Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- 2) Tính thể tích khối lăng trụ n – giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.

Bài 2.1.7. Cho hình nón (N) có đỉnh S và đường tròn đáy tâm O . Tồn tại một hình chóp $M.ABC$ có tam giác ABC với $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O) , điểm M thuộc đường sinh và hình chiếu H của M trên mặt đáy là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số thể tích khối chóp và thể tích khối nón.

Bài 2.1.8. Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O, O' có bán kính r và có đường cao $h = \sqrt{2}r$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho $OA \perp O'B$.

- 1) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính diện tích tứ diện này.
- 2) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với trục OO' . Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α) .
- 3) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có

bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

b) Hướng dẫn giải

Bài 2.1.1. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$OI \perp AB, SI \perp AB, OI = a.$$

$$\text{Ta có } AO = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot SA; AI = SA \cos 60^\circ = \frac{1}{2} SA.$$

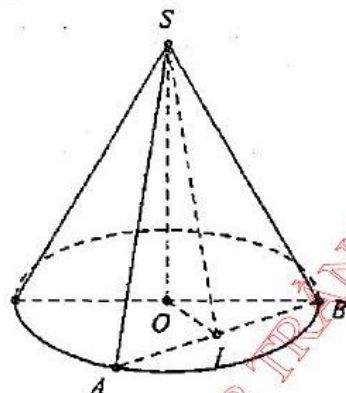
$$\text{Từ đó suy ra } \frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta lại có $\frac{AI}{AO} = \cos \widehat{IAO} \Rightarrow \sin \widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}a}{2}$.

Xét tam giác SAO , ta có $SA = \frac{AO}{\cos 30^\circ} = \sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{3}\pi a^2$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$.



Bài 2.1.2.

- 1) Giả sử SM là một đường sinh bất kỳ của hình nón.

$\widehat{ASM} = \beta$, $AM \leq AB = 2R$. Ta cần chứng minh $\beta \leq \alpha$.

Áp dụng định cosin trong tam giác ta có:

$$AM^2 = SA^2 + SM^2 - 2SA \cdot SM \cos \beta = 2l^2(1 - \cos \beta)$$

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cos \alpha = 2l^2(1 - \cos \alpha)$$

$$AM \leq AB \Rightarrow 1 - \cos \beta \leq 1 - \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha \leq \cos \beta$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \beta \leq \alpha.$$

- 2) Diện tích thiết diện $S_0 = \frac{1}{2} SA \cdot AB \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$.

Giả sử S_x là một thiết diện qua đỉnh-cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SM .

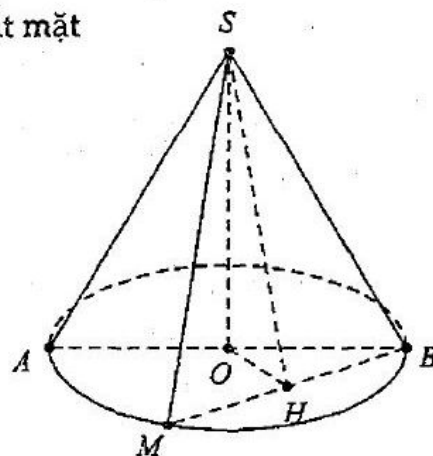
Đặt $\widehat{ASM} = x$. Diện tích thiết diện

$$S_x = \frac{1}{2} SA \cdot SM \cdot \sin x = \frac{l^2 \sin x}{2}.$$

$$\text{Ta có } S_x = S_0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 60^\circ; x = 120^\circ.$$

Vậy khi $x = 60^\circ$ thì $S_x = S_0$.



Bài 2.1.3.

1) Ta có $SM = \frac{OM}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$; $SO = R \cot \alpha$.

Diện tích xung quanh khối nón $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$.

Thể tích khối nón $V = \frac{\pi R^3 \cot \alpha}{3}$.

2) Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SMN.

Ta có $SM \perp SN \Rightarrow S_{td} = \frac{1}{2} S_{MLS} = \frac{R^2}{2 \sin^2 \alpha}$.

3) Gọi I là trung điểm của MN, ta có $\widehat{SIO} = \beta$.

Ta có $OI = SO \cot \beta = R \cot \alpha \cdot \cot \beta$ không đổi.

Vậy SI thuộc một mặt nón cố định có đỉnh S, trục SO và đường tròn đáy (O; OD).

Bài 2.1.4.

Kẻ $OM \perp AB$, $O'N \perp CD$ thì

$MA = MB$, $NC = ND$, MN cắt OO' tại trung điểm I của mỗi đường và $MN \perp AB$.

Do đó $\widehat{NMO} = 45^\circ$, $IM = \frac{a}{2}$.

Đặt $OA = R$, $OO' = h$

Xét các tam giác vuông OIM , AMO ta có:

$$OM = OI = MI \sin 45^\circ = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow OO' = h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$R^2 = OA^2 = OM^2 + AM^2 = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{16}$.

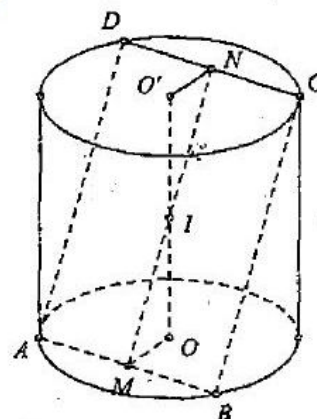
Bài 2.1.5.

1) Chiều cao của hình trụ $AA' = h = 2R$.

Do đó $S_{xq \text{ trụ}} = 2\pi R h = 4\pi R^2$

$$S_{tp \text{ trụ}} = S_{xq \text{ trụ}} + 2S_{\text{đáy}} = 6\pi R^2$$

2) $V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h = 2\pi R^3$



- 3) Ta có $AB = R\sqrt{2}$, $AA' = 2R$ nên thể tích khối lăng trụ là:

$$V = AA' \cdot S_{ABCD} = 4R^3.$$

- 4) Dựng đường sinh MM' và $HM' \perp AC$ ($H \in AC$)

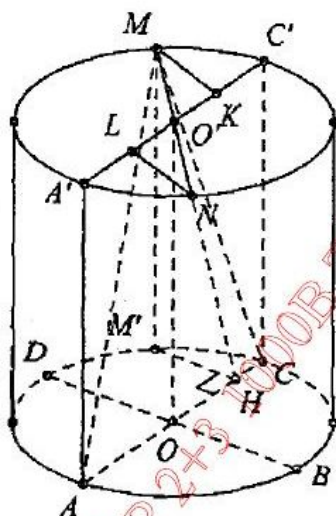
$$\text{Khi đó } MH^2 = MM'^2 + M'H^2 = 4R^2 + M'H^2$$

$$\text{Vì } 0 \leq M'H \leq R \Rightarrow 2R \leq MH \leq R\sqrt{5}.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH \Rightarrow 2R^2 \leq S_{\Delta MAC} \leq R^2\sqrt{5}$$

Vậy $\min S_{\Delta MAC} = 2R^2$ đạt được khi $M' \equiv A$ hoặc $M' \equiv C$

$\max S_{\Delta MAC} = \sqrt{5}R^2$ đạt được khi $M' \equiv B$ hoặc $M' \equiv D$.



Bài 2.1.6.

- 1) Dựng các đường sinh MH , AA' , BB' . Kẻ $HK \perp AB$ thì $MK \perp AB$.

$$\text{Ta có } MK^2 = MH^2 + HK^2 = h^2 + HK^2$$

$$\text{Nên } S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MK \text{ hay } S_{MAB} = R \cdot \sqrt{h^2 + HK^2}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq HK \leq R \text{ nên } Rh \leq S_{MAB} \leq R \cdot \sqrt{h^2 + R^2}.$$

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A' , hoặc M trùng B' .

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2 + R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM \perp A'B'$.

- 2) Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ là đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ là

$$S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = \frac{n}{2} \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin \widehat{A_1OA_2} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

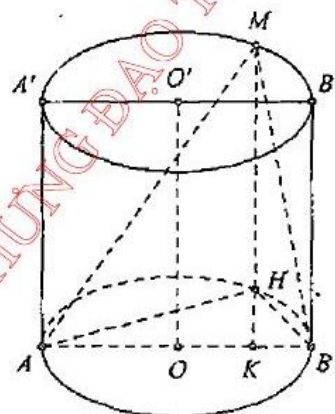
Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt} = h \cdot S_{A_1A_2...A_n} = \frac{n}{2} h R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ thì cạnh của đa giác là $2R \tan \frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là

$$S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = nR^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là

$$V_{lt.ngt} = h \cdot S_{A_1A_2...A_n} = nhR^2 \tan \frac{\pi}{n}$$



Bài 2.1.7. Gọi E là trung điểm của BC, D đối xứng của A qua O. Tam giác ABC cân tại A nên tâm đường tròn nội tiếp H nằm trên đoạn AE.

Vì $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ và HB là phân giác nên $\widehat{HBC} = \widehat{HBA}$, nên $\widehat{HBD} = \widehat{BHD}$, do đó $HD = BD = AD \cdot \sin 15^\circ < \frac{AD}{2}$, hay $HD < OD \Rightarrow H$

nằm trong đoạn OE, vì thế M nằm trên đường sinh SD.

Gọi V_c, V_n lần lượt là thể tích khối chóp, khối nón.

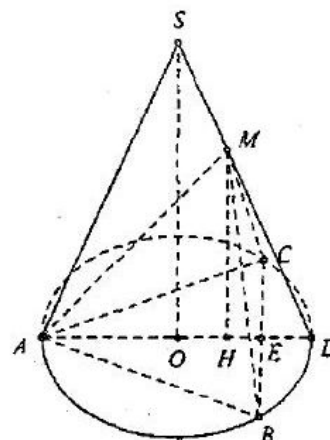
$$\text{Ta có: } V_c = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{12} MH \cdot AB^2, V_n = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{V_c}{V_n} &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AB^2}{OA^2} \cdot \frac{MH}{SO} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AD^2 \cdot \cos^2 15^\circ}{OA^2} \cdot \frac{DH}{DO} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } DO = \frac{1}{2} AD, HD = BD \text{ nên}$$

$$\frac{DH}{DO} = \frac{2DB}{AD} = 2 \sin 15^\circ, \text{ do đó}$$

$$\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{AB^2}{OA^2} \cdot \frac{MH}{SO}$$



$$= \frac{1}{4\pi} \cdot 4 \cos^2 15^\circ \cdot 2 \sin 15^\circ = \frac{1}{2\pi} \cos 15^\circ.$$

$$\text{Ta có } \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_c}{V_n} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8\pi}.$$

Bài 2.1.8.

- 1) Từ A, B ta dựng các đường sinh AD, BC

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA \perp O'B \\ OA \perp OO' \end{cases} \Rightarrow OA \perp OB, \text{ chứng minh}$$

tương tự ta có các mặt của tứ diện OAO'B là các tam giác vuông.

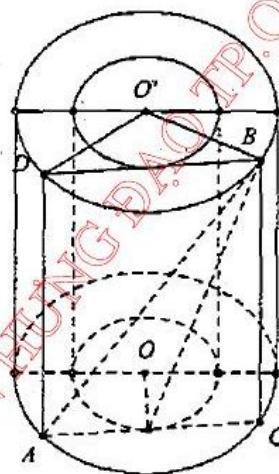
$$\text{Thể tích tứ diện: } V_{OAO'B} = \frac{1}{3} OA \cdot S_{OO'B} = \frac{\sqrt{2}r^3}{6}.$$

- 2) mp(α) chứa AB và song song với OO', chính là mp(ACBD).

$$\text{Kẻ } OI \perp AC \Rightarrow d(OO', (\alpha)) = OI = \frac{\sqrt{2}r}{2}.$$

- 3) Xét hình trụ T có hai đường tròn đáy tâm là O, O' và bán kính là $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

Ta có khoảng cách giữa trục OO' và mp(α) là $OI = \frac{\sqrt{2}r}{2}$ nên mp(α) tiếp xúc với hình trụ T.



Chuyên đề 2. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM THUỘC NÓN, MẶT TRỤ

2.1. Phương pháp giải:

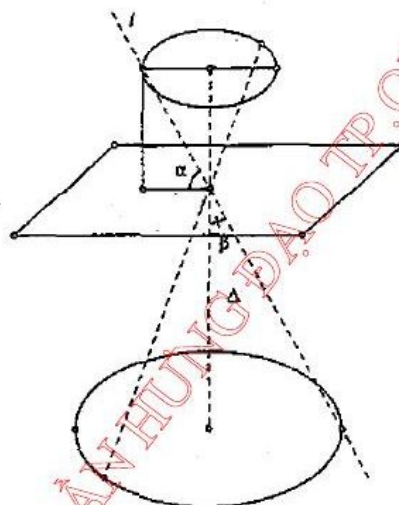
- Để chứng minh một hệ điểm nằm trên mặt nón, ta chứng minh đường thẳng đi qua điểm đó và đỉnh của mặt nón tạo với trục mặt nón một góc không đổi α .
- Để chứng minh một hệ điểm thuộc mặt trụ, ta chứng minh khoảng cách từ các điểm đó đến trục của mặt trụ bằng bán kính của mặt trụ.

2.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2.2.1. Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O cố định. Xét một đường thẳng ℓ thay đổi luôn đi qua O sao cho góc giữa ℓ và mặt phẳng (P) luôn luôn bằng α không đổi ($\alpha \neq 90^\circ$). Chứng minh rằng ℓ luôn nằm trên một mặt nón cố định.

Lời giải.

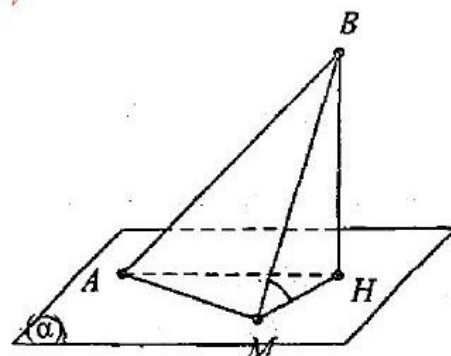
Qua O kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cố định. Gọi β là góc giữa Δ và ℓ . Ta có $\beta = 90^\circ - \alpha$ không đổi nên đường thẳng ℓ thuộc mặt nón cố định có trục là Δ , đỉnh là I và góc ở đỉnh là $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$.



Ví dụ 2.2.2. Cho mặt phẳng (α) . Gọi A là một điểm nằm trên mặt phẳng (α) và B là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho hình chiếu H của B trên mặt phẳng (α) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (α) sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu của M lên AB, ta có hai tam giác vuông MKB và MHB bằng nhau suy ra $MK = MH$ không đổi. Vậy điểm M luôn nằm trên mặt trụ có trục là AB và bán kính $r = BH$.



Ví dụ 2.2.3. Cho hai đường thẳng song song a và b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) thay đổi vuông góc với nhau lần lượt qua a, b và cắt nhau theo giao tuyến c. Chứng minh rằng c thuộc một mặt trụ cố định.

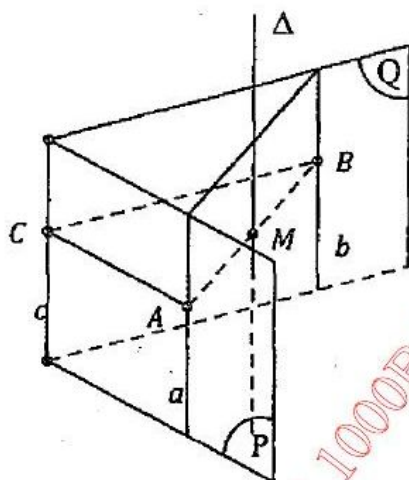
Lời giải.

Xét mặt phẳng cố định (R) vuông góc với a cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C thì tam giác ABC vuông tại C .

Gọi M là trung điểm của AB thì $CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}h$ với $h = d(a, b)$.

Khi đó đường thẳng Δ đi qua M và song song với a là cố định và song song với c , đồng thời $d(c, \Delta) = \frac{1}{2}d$.

Vậy c thuộc mặt trụ có trục Δ và bán kính $R = \frac{1}{2}d(a, b)$.



Ví dụ 2.2.4. Trong mặt phẳng (P) cho góc $\widehat{xOy}$. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và luôn vuông góc với đường phân giác trong của góc $\widehat{xOy}$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (Q) với Ox, Oy . Trong mặt phẳng (Q) xét điểm M thỏa $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng các điểm M luôn thuộc một mặt nón xác định.

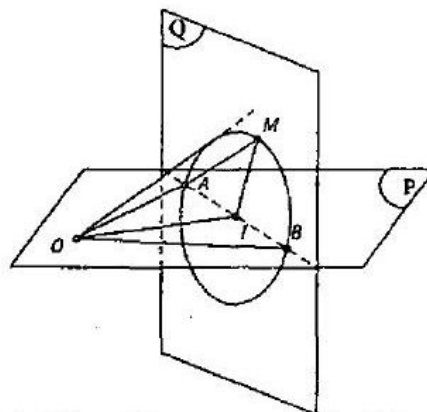
Lời giải.

Gọi Oz là tia phân giác trong của góc $\widehat{xOy}$ và I là giao điểm của (Q) với Oz . Suy ra I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trong mặt phẳng (Q), vì M thỏa $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB .

Lại có $OI \perp (Q)$ nên đường tròn sinh ra bởi điểm M quay quanh OI .

Vậy M thuộc mặt nón đỉnh O trục $OI \equiv Oz$ là tia phân giác trong của góc $\widehat{xOy}$.



2.3. Bài tập

Bài 2.2.1. Cho điểm A nằm ở ngoài mặt cầu (S). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) luôn nằm trên một mặt nón cố định.

Bài 2.2.2. Trong không gian cho hai điểm A, B phân biệt cố định và một điểm M bất kỳ trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB có diện tích S không đổi. Chứng minh điểm M thuộc một mặt trụ cố định, xác định bán kính mặt trụ đó.

Bài 2.2.3. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng R, góc ở đỉnh là 2α , với $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

- 1) Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón.
- 2) Tìm diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.
- 3) Xét hai điểm M, N thay đổi trên đáy sao cho góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy hình nón bằng β . Chứng minh rằng đường thẳng SI với I là trung điểm MN luôn thuộc một mặt nón cố định.

b) Hướng dẫn giải

Bài 2.2.1. Gọi O, R là tâm và bán kính mặt cầu và AM là một đường thẳng bất kỳ qua A và tiếp xúc với mặt cầu tại M. Đặt $\widehat{OAM} = \alpha$, $OA = a$

Ta có: $\tan \alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{a}$ không đổi nên α không đổi.

Vậy AM luôn nằm trên một mặt nón có trục là OA, đỉnh A và góc ở đỉnh là 2α .

Bài 2.2.2. Gọi H là chân đường cao hạ từ M xuống đường thẳng AB.

Ta có diện tích tam giác MAB là $S = \frac{1}{2} MH \cdot AB \Rightarrow MH = \frac{2S}{AB}$ không đổi.

Vậy M thuộc mặt trụ cố định có trục là đường thẳng AB, bán kính

$$r = MH = \frac{2S}{AB}.$$

Bài 2.2.3.

1) Ta có $SM = \frac{OM}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$. $SO = R \cot \alpha$.

Diện tích xung quanh khối nón $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$.

Thể tích khối nón $V = \frac{\pi R^3 \cot \alpha}{3}$.

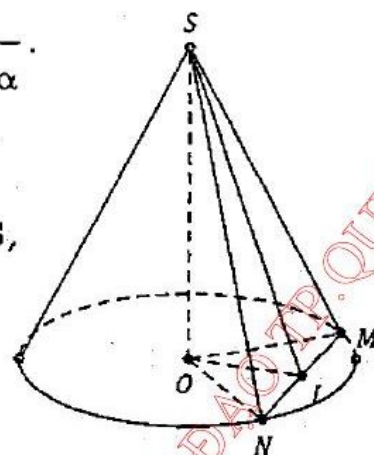
2) Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SMN.

Ta có $SM \perp SN \Rightarrow S_{td} = \frac{1}{2} SM \cdot SN = \frac{R^2}{2 \sin^2 \alpha}$.

3) Gọi I là trung điểm của MN , ta có $\widehat{SIO} = \beta$.

$$OI = SO \cot \beta = R \cot \alpha \cdot \cot \beta \text{ không đổi.}$$

Vậy SI thuộc một mặt nón cố định có đỉnh S , trục SO và đường tròn đáy $(O; OI)$



Chuyên đề 3. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM NẸM TRÊN MẶT CẦU

3.1. Phương pháp giải.

Để chứng minh một hệ điểm nằm trên một mặt cầu, ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1: Chứng minh hệ điểm đó cách đều một điểm cố định cho trước

Cách 2: Chứng minh hệ điểm đó cùng nhìn một đoạn thẳng cố định dưới một góc vuông.

3.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2.3.1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AC \perp BD$. Chứng minh rằng 6 trung điểm của 6 cạnh nằm trên một mặt cầu.

Lời giải.

Ta chứng minh được $AD \perp BC$.

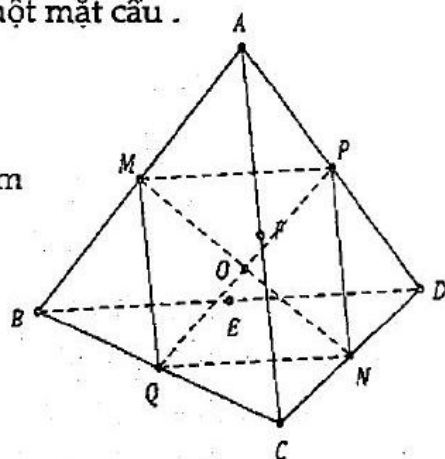
Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, BD, AC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \parallel MQ \parallel AC \\ MP \parallel NQ \parallel BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow MPNQ \text{ là}$$

hình chữ nhật nên giao điểm O

của MN và PQ cách đều bốn điểm M, N, P, Q .

Tương tự ta cũng có O cách đều bốn điểm M, N, E, F

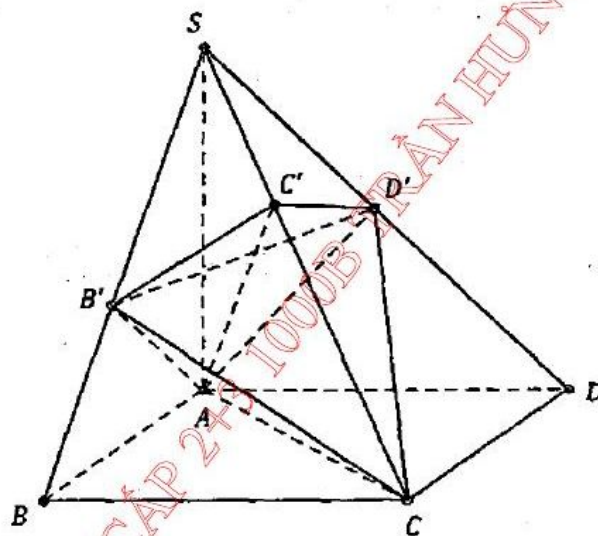


Vậy O cách đều sáu điểm M, N, P, Q, E, F nên sáu điểm này nằm trên mặt cầu tâm O.

Chú ý: Ngoài cách chứng minh trên ta có thể chứng minh M, N, E, F cùng nhìn PQ dưới một góc vuông.

Ví dụ 2.3.2. Trong hình phẳng (P) cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax' vuông góc với mp(P) lấy một điểm S bất kỳ. Gọi (Q) là hình phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng thuộc một hình cầu cố định. Xác định bán kính hình cầu đó.

Lời giải.



$$\text{Ta có: } (Q) \perp SC \Rightarrow AC' \perp SC \Rightarrow \widehat{AC'C} = 90^\circ \quad (1)$$

$$SA \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AB' \perp BC.$$

$$\text{Và } SC \perp (Q) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AB' \perp B'C \Rightarrow \widehat{AB'C} = 90^\circ \quad (2).$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \widehat{AD'C} = 90^\circ \quad (3).$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên chúng thuộc mặt cầu cố định có

$$\text{đường kính là AC. Bán kính hình cầu: } R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Ví dụ 2.3.3. Chứng minh rằng các đỉnh của một hình chóp nằm trên một mặt cầu khi và chỉ khi đáy là một đa giác nội tiếp.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$).

* Giả sử hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp tâm O

Gọi I là hình chiếu của O lên mp($A_1A_2...A_n$).

Ta có $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$

$\Rightarrow IA_1 = IA_2 = ... = IA_n$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$. Hay đáy là đa giác nội tiếp.

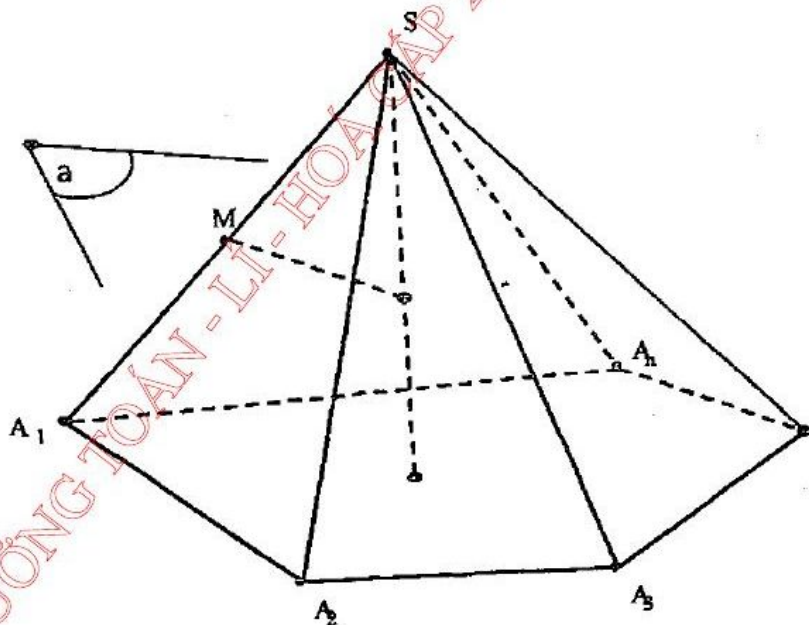
* Ngược lại, giả sử đáy là một đa giác nội tiếp đường tròn tâm I .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I vuông góc với mặt phẳng đáy (Δ gọi là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$). Khi đó dễ thấy với mọi $M \in \Delta$ thì M cách đều các đỉnh của đáy.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (chẳng hạn SA_1), khi đó (α) và Δ sẽ cắt nhau tại một điểm ta gọi giao điểm đó là O .

$$\forall \begin{cases} O \in \Delta \\ O \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA_1 = OA_2 = ... = OA_n \\ OA_1 = OS \end{cases} \Rightarrow OA_1 = OA_2 = ... = OS.$$

Vậy các đỉnh của hình chóp nằm trên mặt cầu tâm O .



Ví dụ 2.3.4. Chứng minh rằng các đỉnh của một hình lăng trụ nằm trên một mặt cầu khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp.

Lời giải.

Để đơn giản ta xét lăng trụ có đáy là tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$

* Giả sử các đỉnh của lăng trụ nằm trên mặt cầu tâm O

Khi đó dễ thấy hai đáy nội tiếp hai đường tròn là giao của mặt cầu và hai mặt phẳng đáy đồng thời hai đường tròn này bằng nhau.

Gọi I, I' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$

Ta có: $\begin{cases} OI \perp (ABCD) \\ OI' \perp (A'B'C'D') \end{cases}$

Mà $(ABCD) \parallel (A'B'C'D') \Rightarrow OI \parallel OI' \Rightarrow O, I, I'$ thẳng hàng.

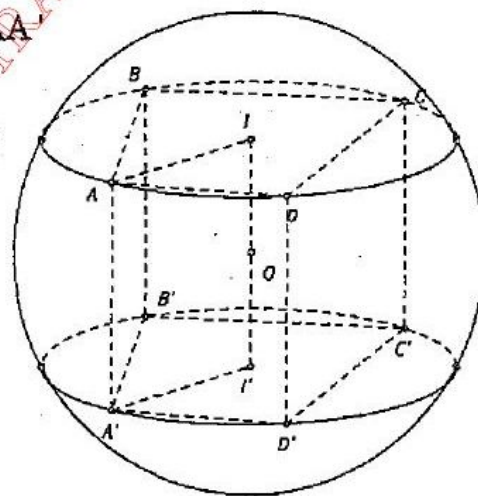
Để chứng minh lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng ta chứng minh $II' \parallel AA'$.

Ta có $IA \parallel I'A'$ (vì cùng vuông góc với II') và $IA = I'A'$ (bán kính hai đường tròn bằng nhau)

$\Rightarrow IAA'I'$ là hình bình hành $\Rightarrow II' \parallel AA'$

Vậy lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

* Điều ngược lại chứng minh đơn giản, xin dành cho bạn đọc.



Ví dụ 2.3.5. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (tức là $AB = CD, BC = AD, AC = BD$). Chứng minh rằng bốn chân đường cao hạ xuống các mặt, bốn trung điểm của các đường cao và bốn trục tâm của bốn mặt là 12 điểm nằm trên mặt cầu.

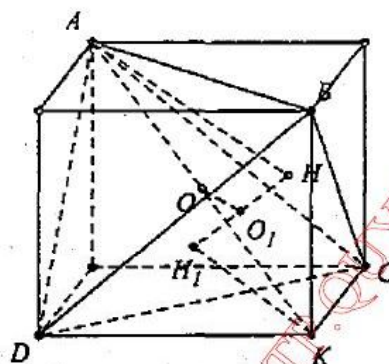
Lời giải.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, AH là đường cao của hình chóp, H_1, O_1 là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

Trước hết ta chứng minh O_1 là trung điểm đoạn HH_1

Ta lấy hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

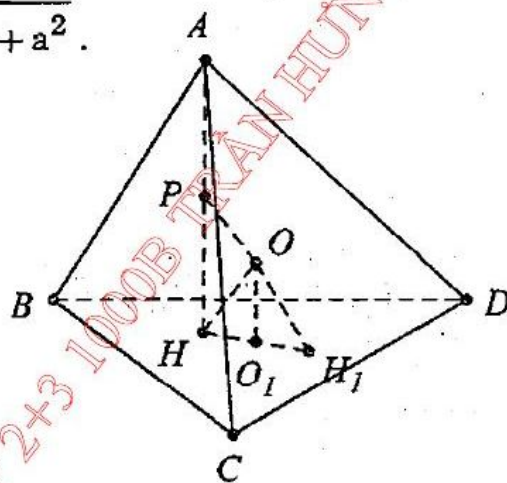
Ta có O là trung điểm của AK , $KBCD$ là tứ diện vuông và H_1 là trực tâm tam giác BCD nên $KH_1 \perp (BCD)$, do đó hình chiếu O_1 của O xuống mặt phẳng (BCD) là trung điểm đoạn HH_1 . Từ đó suy ra $OH = OH_1$.



Gọi P là trung điểm AH , ta có $AH = 4OO_1$ nên $OP = OH$

Đặt $r = OO_1$, $a = O_1H_1$, ta có: $OH = OP = OH_1 = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Tương tự ta chứng minh được 12 điểm nói trong bài toán nằm trên mặt cầu tâm O , bán kính $R = \sqrt{r^2 + a^2}$.



3.3. Bài tập vận dụng

Bài 2.3.1. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Biết $SA = a, AB = b, AD = c$. Chứng minh các điểm A, B, C, D, M, N, P thuộc một mặt cầu. Tính bán kính của mặt cầu đó.

Bài 2.3.2. Chứng minh rằng nếu hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì các điểm nằm trên hai đường tròn đó nằm trên một mặt cầu.

Bài 2.3.3. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại K, L, M, N . Gọi P là một điểm bất kì trong không gian không nằm trên các mặt của tứ diện. Các đường thẳng PK, PL, PM, PN một lần nữa cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA lần lượt tại Q, R, S, T . Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S và T nằm trên một mặt cầu.

Bài 2.3.4. Cho tam giác ABC vuông tại C . Qua A dựng đường thẳng Δ vuông góc với (ABC) . Điểm S di động trên Δ (S khác A). Hạ $AD \perp SC$ và $AE \perp SB$. Chứng minh rằng A, B, C, D, E nằm trên một mặt cầu.

Bài 2.3.5. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $AB = 2a$, $BC = CD = DA = a$, SA vuông góc với đáy. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $AB'C'D'$ nội tiếp đường tròn
- 2) Các điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu.

Bài 2.3.6. Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của một đỉnh lên mặt đối diện là trực tâm của mặt đó. Chứng minh rằng tất cả các trung điểm của các cạnh tứ diện nằm trên một mặt cầu.

Hướng dẫn giải

Bài 2.3.1. Ta có $AN \perp SC$. Từ $AM \perp BC, AM \perp SC$

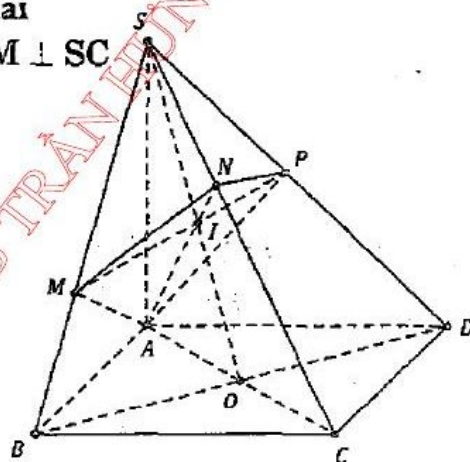
ta có $AM \perp MC$.

Tương tự $AP \perp PC$.

Do đó các điểm B, D, M, N, P cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông.

Vậy A, B, C, D, M, N, P thuộc mặt cầu tâm O có bán kính là

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$



Bài 2.3.2.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} O_1M \perp AB \\ O_2M \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (O_1O_2M)$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua O_1 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_1) ,

d_2 là đường thẳng đi qua O_2 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_2) .

Dễ thấy $d_1, d_2 \subset (O_1O_2M)$ nên

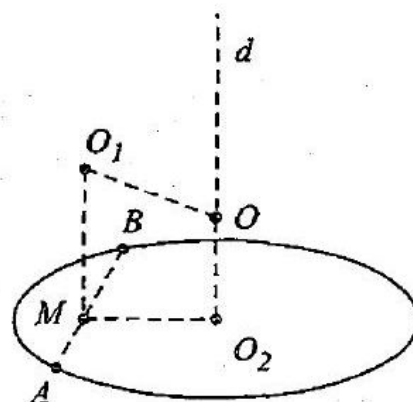
$d_1 \cap d_2 = \{O\}$. Khi đó mọi điểm N

nằm trên (O_1) hoặc (O_2) ta luôn có

$ON = OA = OB$. Do đó tất cả các

điểm nằm trên hai đường tròn (O_1)

và (O_2) đều thuộc mặt cầu (O, OA) .

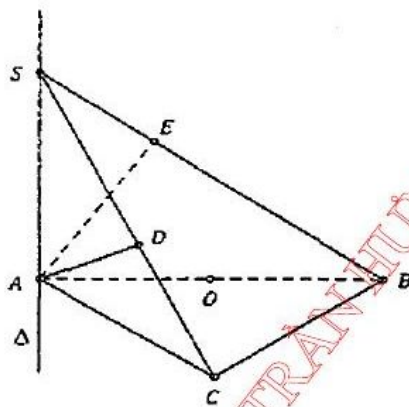


Bài 2.3.3. Gọi $F = KL \cap MN$, E là giao điểm của PF với mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$. Khi đó các điểm P, Q, R, E nằm trên đường tròn là thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$ với mặt phẳng (PKL) .

Mặt khác $F = KL \cap MN \Rightarrow P, S, T, E$ nằm trên đường tròn thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PACD$ với mặt phẳng (PMN) .

Do đó các điểm P, Q, R, S, T nằm trên hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm P, E nên hai đường tròn này nằm trên một mặt cầu.

Bài 2.3.4. Gọi O là trung điểm cạnh AB , khi đó: $OA = OB = OC$ (1)



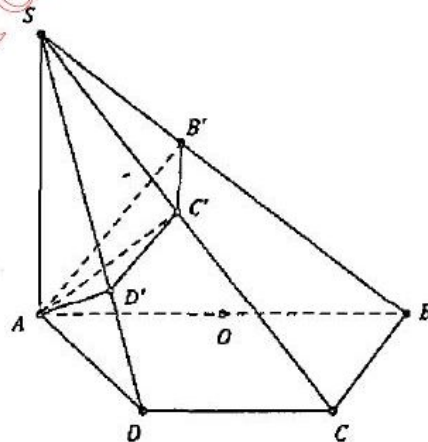
Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AC \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AD \perp (SBC)$

Nên $AD \perp BD \Rightarrow OA = OB = OD$ (2)

Mặt khác, tam giác AEB vuông tại E nên $OA = OB = OE$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra năm điểm A, B, C, D, E nằm trên mặt cầu đường kính AB .

Bài 2.3.5.



- 1) Gọi O là trung điểm cạnh AB , do $ABCD$ là nửa lục giác đều với $AB = 2a, BC = CD = DA = a$ nên $OA = OB = OC = OD = a$. Suy ra Tam giác ACB vuông tại C , tam giác ADB vuông tại D .

Vì $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AC'$

Mặt khác: $AC' \perp SB \Rightarrow AC' \perp (SBC) \Rightarrow AC' \perp SC$, $AC' \perp B'C'$

Tương tự, ta có: $AD' \perp SD$, $AD' \perp B'D'$

Suy ra A, B', C', D' cùng thuộc đường tròn đường kính AB' .

2) Theo kết quả câu trên ta có $OA = OB = OC = OD = a$

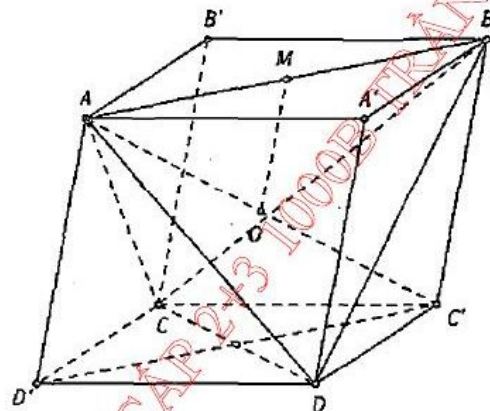
Tam giác $AB'B$ vuông tại B' nên $OB' = \frac{1}{2}AB = a$

Mặt khác: $AC' \perp (SCB) \Rightarrow AC' \perp C'B \Rightarrow OC' = \frac{1}{2}AB = a$

$AD' \perp (SDB) \Rightarrow AD' \perp D'B \Rightarrow OD' = \frac{1}{2}AB = a$

Từ đó suy ra các điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $R = a$.

Bài 2.3.6.



Giả sử hình chiếu H của A lên mặt (BCD) là trực tâm tam giác BCD .

Ta có: $AH \perp BD$, $CH \perp BD \Rightarrow BD \perp (ACH) \Rightarrow BD \perp AC$

Tương tự: $AB \perp CD$, $AD \perp BC$.

Dựng hình hộp $AB'CD'$. $A'BC'D$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Do $AC \perp B'D$, $BD \perp A'C'$ nên các tứ giác $AB'CD'$, $A'BC'D$ là hình thoi

Thương tự: $AA'DD'$, $BC'CB'$ cũng là hình thoi.

Do đó tất cả các cạnh của hình hộp bằng nhau.

Gọi M là trung điểm cạnh AB và O là tâm của hình hộp, ta có:

$$OM = \frac{1}{2}BC'$$

Vậy O cách các trung điểm của tứ diện một khoảng bằng nửa cạnh hình hộp.

Hay các trung điểm các cạnh của tứ diện nằm trên một mặt cầu.

Chuyên đề 4. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP VÀ HÌNH LĂNG TRỤ

4.1. Phương pháp giải:

1) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy là đa giác nội tiếp.

Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SA_1A_2...A_n$ ta thường thực hiện các bước sau:

- Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Kẻ Ix vuông góc với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$.
- Xác định mặt phẳng (P) là trung trực một cạnh bên SA_1 .
- Tâm O là giao điểm của Ix và (P) . Bán kính $R = SO = OA_1$.

Chú ý:

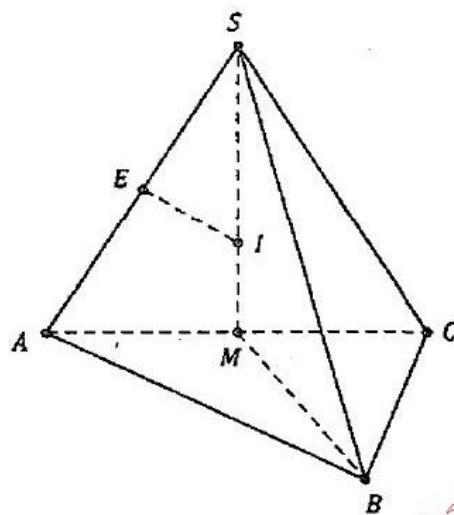
- Trong hình chóp đều thì đường cao của hình chóp là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Trong trường hợp trục đường tròn ngoại tiếp đáy đồng phẳng với một cạnh bên (như hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, hay hình chóp đều,...) thay vì tìm xác định mặt phẳng trung trực ta đi xác định đường thẳng trung trực.
- Trong một số bài toán chỉ yêu cầu xác định bán kính mặt cầu ngoại ta có thể đưa về tìm bán kính của đường tròn lớn.
- Nếu hình chóp là một tứ diện có một mặt là tam giác đặc biệt như tam giác vuông, đều hoặc cân nên chọn tam giác đó làm đáy.
- Nếu xác định được đoạn thẳng MN cố định và các đỉnh của hình chóp cùng nhìn đoạn MN dưới một góc vuông thì tâm hình cầu là trung điểm đoạn MN và $R = \frac{MN}{2}$.
- Nếu xác định được điểm O thỏa mãn $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ thì O chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Trong nhiều bài toán thay vì đi xác định bán kính của mặt cầu ta đi xác định bán kính của đường tròn lớn.

2) Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

- Một lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn nối hai tâm của hai đáy.

Ví dụ 2.4.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $SA = SB = SC = a$;
 $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Xác định tâm và tính bán kính
 mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải.



Ta có: $AB = a$, $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{2}$

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Vì $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên suy ra tam giác ABC vuông tại B .

Gọi M là trung điểm cạnh AC , suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Mặt khác: $SA = SB = SC = a$ nên $SM \perp (ABC)$, hay SM là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SAC) đường trung trực cạnh SA cắt SM tại I .

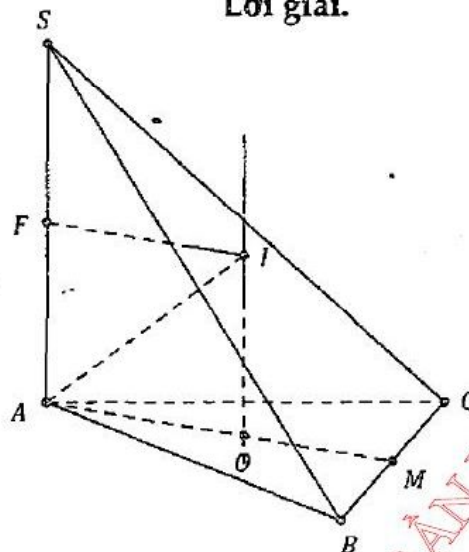
Khi đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Ta có: } \triangle SEI \sim \triangle SMA \Rightarrow \frac{SE}{SM} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow R = SI = \frac{SA^2}{2SM}.$$

$$\text{Mà } SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Suy ra } R = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Lời giải.



Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

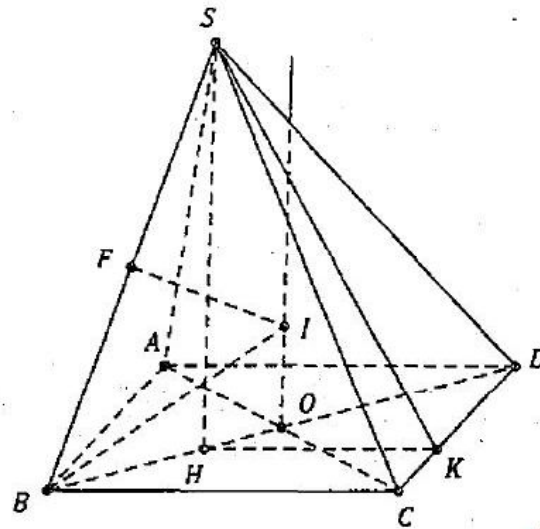
$$\text{Suy ra } R = LA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{AO^2 + AF^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{3} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2\sqrt{3}}.$$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{37\sqrt{37}}{9\sqrt{3}}\pi a^3.$$

Ví dụ 2.4.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$.

Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Vì tứ giác BOIF là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BI nên

Do đó, $R = BI = \frac{2a\sqrt{130}}{9}$.

Ví dụ 2.4.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và các cạnh bên $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$ biết $\widehat{BSD} = 90^\circ$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi $ABCD$.

Theo bài ra ta có $BD = a$. Mà tam giác $\triangle SBD$ vuông tại S nên

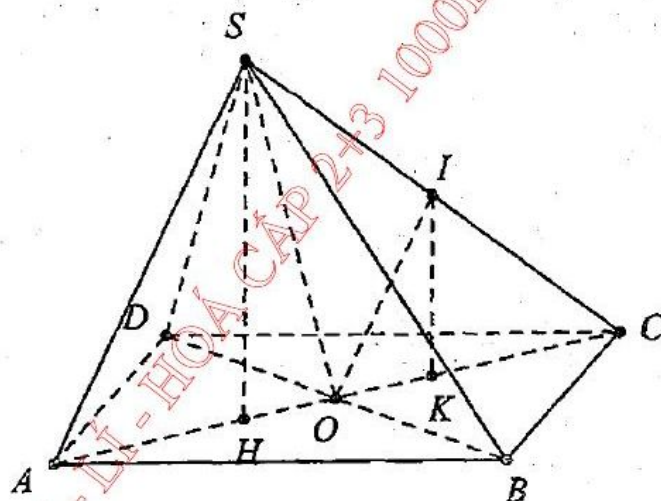
$$SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \frac{a}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên $SA = SB = SC$).

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a, SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC , trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I . Ta có I là trung điểm của SC nên $IS = IC$, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$.

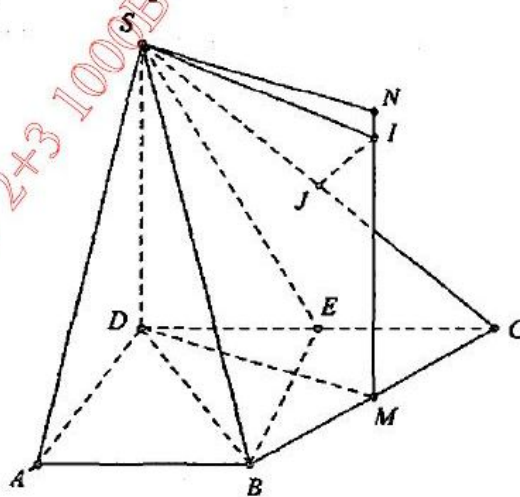
$$\text{Bán kính của mặt cầu là } R = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$



Ví dụ 2.4.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D , $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

Lời giải.

Vì $AB = DE = AD = a$ và $\widehat{DAB} = 1v$ nên $ABED$ là hình vuông.

$$R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2} a.$$


WWW.FACEBOOK.COM/BOIDUONGHOAHOCOUYNHON

Do $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Ta có $OA = OD = R$; $OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 9}$,

$$ON = \sqrt{R^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - 16}.$$

Ta có $DM^2 = AD^2 - AM^2 = 65$

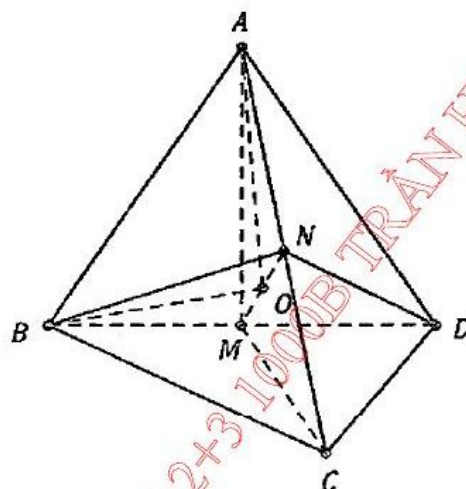
$$\Rightarrow MN^2 = DM^2 - DN^2 = 49 \Rightarrow MN = 7.$$

• Nếu O nằm trong hình chóp thì $MN = OM + ON$.

$$\text{Suy ra } 7 = \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5.$$

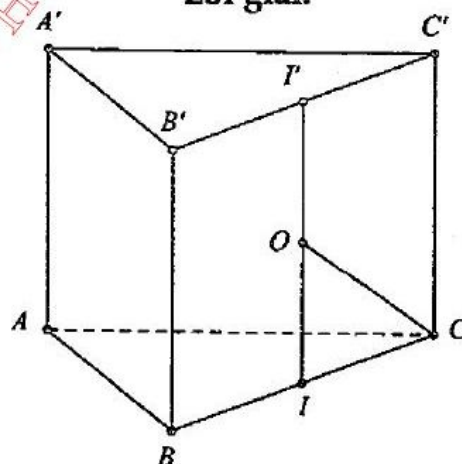
• Nếu O nằm ngoài hình chóp thì $MN = OM - ON$.

Suy ra $7 = \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}$ phương trình vô nghiệm. Vậy bán kính $R = 5$.



Ví dụ 2.4.8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Lời giải.



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Ta có I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC, A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
Bán kính $R = OC$.

$$\text{Do } IC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2\cos 60^\circ} = a; OI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \sqrt{OI^2 + IC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Ví dụ 2.4.9. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ đáy là tam giác ABC với góc nhọn $\widehat{BAC} = \alpha$; $BC = k$; $AA' = h$.

- 1) Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.
- 2) Giả sử $mp(BCC'B')$ thay đổi nhưng $AB + AC = a$ (a không đổi).

Cho $\alpha = 60^\circ$ và h không đổi. Tìm k để bán kính mặt cầu bé nhất.

Lời giải.

- 1) Gọi I, I' lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$ và O là trung điểm của II' . Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ. Bán kính $R = OC$. Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có:

$$IC = r = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{k}{2\sin \alpha} \Rightarrow R = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \frac{\sqrt{k^2 + h^2 \sin^2 \alpha}}{2\sin \alpha}$$

- 3) Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$
 $\geq \frac{(AB + AC)^2}{2} - (AB + AC)^2 \cos^2 \alpha$
 $\Rightarrow k^2 \geq \frac{a^2}{2} - a^2 \cos^2 60^\circ = \frac{a^2}{4}.$

Vậy R nhỏ nhất khi k nhỏ nhất hay tam giác ABC đều cạnh $\frac{a}{2}$.

Ví dụ 2.4.10. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp trong mặt cầu bán kính r , tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$, M là trung điểm của CD .

Phân giác trong góc $\widehat{SHM}$ cắt SH tại J là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Đặt $\widehat{SMH} = 2\varphi$ ($0 < \varphi < 45^\circ$) ta có

$$HM = HJ \cdot \cot \varphi \Rightarrow a = 2r \cdot \cot \varphi \text{ và } SH = HM \cdot \tan 2\varphi = r \cdot \cot \varphi \cdot \tan 2\varphi$$

nên thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$V = \frac{1}{3} SH S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \cot \varphi \cdot \tan 2\varphi \cdot (2r \cdot \cot \varphi)^2 = \frac{4}{3} r^3 \cdot \cot^3 \varphi \cdot \tan 2\varphi.$$

$$\text{Mặt khác } V = \frac{1}{3} r \cdot S_{tp} \text{ nên } S_{tp} = \frac{3V}{r} = 4r^2 \cdot \cot^3 \varphi \cdot \tan 2\varphi = 4r^2 \cdot f(\varphi).$$

Vì r không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(\varphi) = \cot^3 \varphi \cdot \tan 2\varphi$ nhỏ nhất.

$$\text{Mà } f(\varphi) = \frac{1}{\tan^3 \varphi} \cdot \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{2}{(1 - \tan^2 \varphi) \tan^2 \varphi} \text{ và } 0 < \varphi < 45^\circ$$

nên $0 < \tan \varphi < 1$,

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(1 - \tan^2 \varphi) \tan^2 \varphi \leq \left(\frac{1 - \tan^2 \varphi + \tan^2 \varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Nên } f(\varphi) = \frac{2}{(1 - \tan^2 \varphi) \tan^2 \varphi} \geq 8 \Rightarrow S_{tp} \geq 32r^2.$$

$$\text{Vậy } \max S_{tp} = 32r^2.$$

$$\text{Đạt được khi } 1 - \tan^2 \varphi = \tan^2 \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}r, h = 4r.$$

Ví dụ 2.4.11. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O) . Gọi A_0, B_0, C_0, D_0 lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC . Kẻ các đường kính AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Chứng minh rằng:

- 1) Các đường thẳng $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H ,
- 2) Các đường thẳng đi qua H và trung điểm của cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Lời giải.

- 1) Gọi G là trọng tâm tứ diện, H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$, khi đó ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0H} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} \\ &= \overrightarrow{A_0A_1} + (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1A_0} \end{aligned}$$

Suy ra A_0, A_1, H thẳng hàng hay A_0A_1 đi qua H

Chứng minh tương tự ta cũng có B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 cũng đi qua H .

Vậy $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H

- 2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{ON} \end{aligned}$$

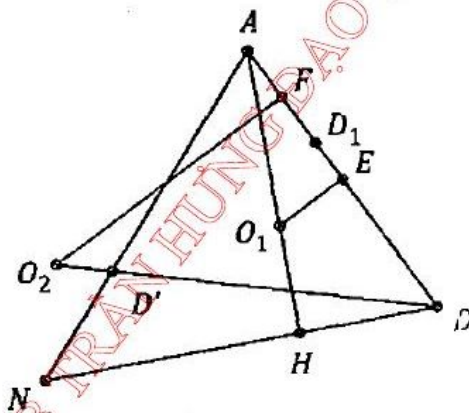
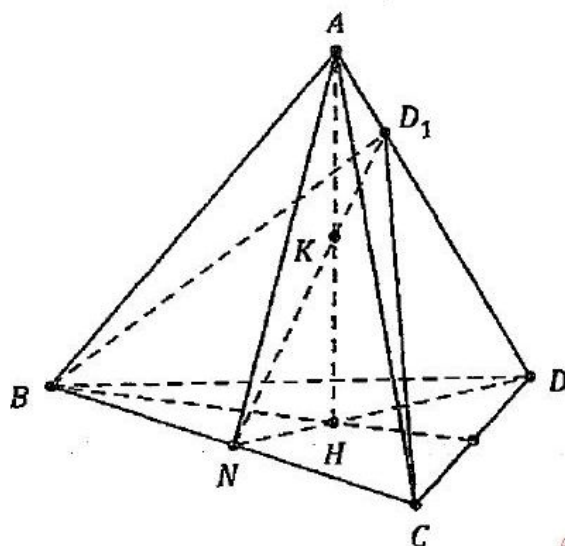
Mà $ON \perp CD \Rightarrow MH \perp CD$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có được các đường thẳng đi qua H và trung điểm của một cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Ví dụ 2.4.12. Cho tứ diện đều $ABCD$, K là trung điểm của đường cao AH của tứ diện. Mặt phẳng (BCK) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số bán kính mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

Lời giải.

Đặt $AB = a$.



Gọi D_1 là giao điểm của AD với mặt phẳng (BCK) , suy ra

$$AD_1 = \frac{1}{4} AD.$$

Vì AH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nên tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCDD_1$ thuộc AH , suy ra O_1 là giao của AH với đường trung trực O_1E của đoạn DD_1 nằm trong mặt phẳng (AHD) .

Tương tự, tâm O_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD_1$ là giao của trục đường tròn DD' của tam giác ABC với trung trực O_2F của đoạn AD_1 nằm trong mặt phẳng (ADD') .

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện $BCDD_1$ và $ABCD_1$. Ta có: $R_1 = O_1D$, $R_2 = O_2A$.

Xét tứ giác nội tiếp O_1HDE trong mặt phẳng (AHD) ta có:

$$AE \cdot AD = AO_1 \cdot AH, \quad AE = \frac{5a}{8}, \quad AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Suy ra } AO_1 = \frac{5a\sqrt{6}}{16} \Rightarrow O_1H = AH - AO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{48}.$$

$$\text{Vậy } R_1^2 = O_1D^2 = O_1H^2 + HD^2 = \frac{129a^2}{8.48} \Rightarrow R_1 = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}}.$$

Tương tự, khi xét tứ giác nội tiếp $O_2D'FA$ ta có:

$$DD'.DO_2 = DF.DA, DF = \frac{a}{8} + \frac{3a}{4} = \frac{7a}{8}, DA = a, DD' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Từ đó, } DO_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16} \Rightarrow D'O_2 = \frac{5a\sqrt{6}}{48}$$

$$\text{Do đó } R_2^2 = O_2A^2 = O_2D'^2 + D'A^2 = \frac{153a^2}{48.8} \Rightarrow R_2 = \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}}.$$

$$\text{Vậy } \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{43}{51}}.$$

II. Bài tập vận dụng

Bài 2.4.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh

bên SA vuông góc với đáy. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 60° .

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài 2.4.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc

giữa cạnh bên SB với đáy là 60° . $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$,

$\widehat{ACB} = 30^\circ$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 2.4.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình

chiếu của A trên SB, SC . Chứng minh rằng các điểm A, B, C, M, N

nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó

biết rằng $\widehat{BAC} = \alpha$, $BC = a$.

Bài 2.4.4. Trong hình phẳng (P) cho nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp

đường tròn đường kính $AD = 2R$. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông

góc với (P) , trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng

(SDC) và (P) bằng 60° . Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua

năm điểm S, A, B, C, D .

Bài 2.4.5. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là

đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng

(P) lấy điểm C , trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng

vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ

diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a .

Bài 2.4.6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .

Bài 2.4.7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SBC) \perp (ABC)$ và $AB = AC = SA = SB = a$.

Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp khi $SC = x$.

Bài 2.4.8. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên tia Ax lấy điểm M , trên tia By lấy điểm N sao cho $AM + BN = MN$.

- 1) Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABMN$ là lớn nhất.
- 2) Chứng minh rằng khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABMN$ là nhỏ nhất.

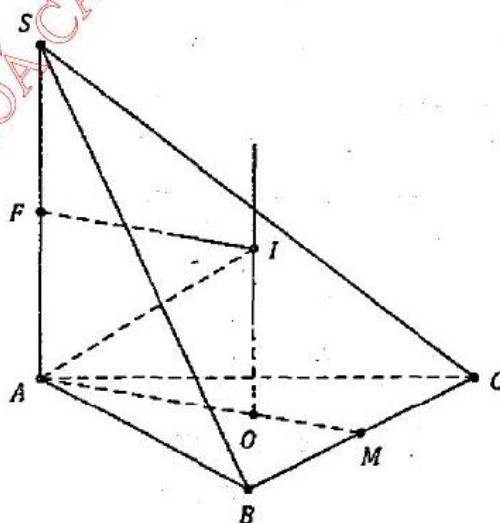
Bài 2.4.9. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G , bán kính mặt cầu ngoại tiếp R . Chứng minh rằng:

$$GA + GB + GC + GD + 4R \geq \frac{\sqrt{6}}{3} (AB + AC + AD + BC + BD + CD).$$

Bài 2.4.10. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm những điểm M sao cho trọng tâm của các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC$ cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Hướng dẫn giải.

Bài 2.4.1.



Gọi O là tâm của đáy, qua O dựng đường thẳng Δ song song với SA . Ta có Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SAO) đường trung trực cạnh SA cắt Δ tại I , suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, suy ra $BC \perp (SAM)$.

Do đó $\widehat{SMA}$ là góc giữa mặt bên (SBC) với (ABC), suy ra $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$, $AO = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $R = AI = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{129}}{12}$.

Bài 2.4.2. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi I là trung điểm cạnh AC. Trong mp(SAC) kẻ $Ix \parallel SA$.

Ta có Ix là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, Ix cắt SC tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. Bán kính $R = OA$.

Ta có

$\widehat{SAB} = (\widehat{SB, (ABC)}) = 60^\circ$; $SA = AB \tan 60^\circ = 3a$, $AC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}a$.

Gọi J là trung điểm SC $\Rightarrow AIOJ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow R = AO = \sqrt{AJ^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{21}a}{2}$.

Bài 2.4.3. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì tam giác AMB vuông tại M nên tâm mặt cầu đi qua ba điểm

A, M, B nằm trên Δ_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB, tức là trung trực của AB (xét trong mặt phẳng (ABC)).

Tương tự tâm mặt cầu đi qua A, C, N nằm trên Δ_2 là trung trực của AC trong mặt phẳng (ABC). Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều tất cả các điểm A, B, C, M, N nên các điểm đó nằm trên mặt cầu (S) tâm I, bán kính R. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$ABC \Rightarrow R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu } S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{\sin^2 \alpha} a^2.$$

$$\text{Thể tích khối cầu } V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3 \sin^3 \alpha} a^3.$$

Bài 2.4.4.

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Trong tam giác SAC từ trung điểm J

của cạnh SA kẻ Jy song song với AC, ta có Jy là đường trung trực cạnh SA.

Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.

Ta có I thuộc Ox nên $IA = IB = IC = ID$ và I thuộc Jy nên $IS = IA$.

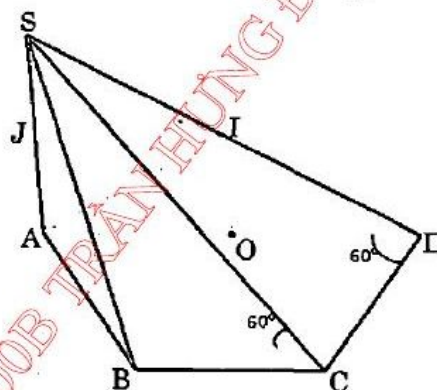
Vậy I là tâm mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D và bán kính mặt cầu này là $r = IA$.

Theo giả thiết ta có: $\widehat{SCA} = (\widehat{SCD}, (P)) = 60^\circ$.

Suy ra $AC = AD \sin 60^\circ = \sqrt{3}R$, $SA = AC \tan 60^\circ = 3R$.

Tứ giác AOIJ là hình chữ nhật nên $AI = \sqrt{AJ^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $r = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.



Bài 2.4.5. Vì $(P) \perp (Q)$ và $CA \perp \Delta$ nên $CA \perp (Q) \Rightarrow CA \perp AD$.

Tương tự $BD \perp BC$, nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là trung điểm CD và có bán kính $R = \frac{CD}{2}$. Áp dụng Pitago cho các tam giác

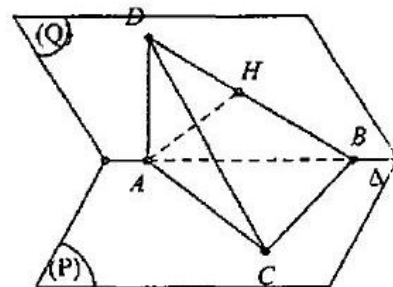
ABD, ACD ta có: $R = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

Kẻ $AH \perp BC$ thì H là trung điểm của BC (do tam giác ABC vuông cân A).

Ta có: $AH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Vì $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH$ nên $AH \perp (CBD)$.

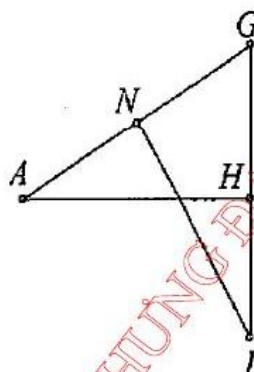
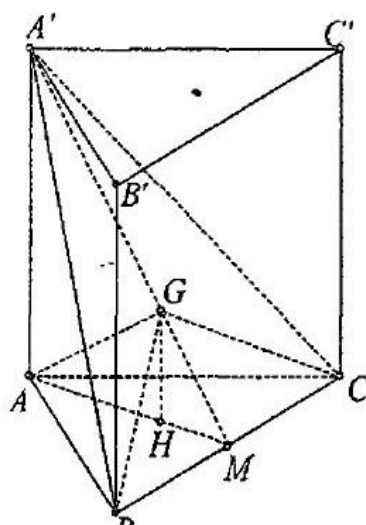
Vậy $d(A, (BCD)) = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.



Bài 2.4.6. Gọi M là trung điểm của BC .

Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$

Suy ra $A'M \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy $\widehat{A'MA} = 60^\circ$.



Ta có $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ nên $A'A = AM$ và $\widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$$

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $\frac{MG}{MA'} = \frac{1}{3} = \frac{MH}{MA}$ nên $GH \parallel AA' \Rightarrow GH \perp (ABC)$. Do H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên GH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi I là giao điểm của GH với trung trực của GA (qua trung điểm N của GA) thì đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$.

Ta có $\triangle IGN \sim \triangle AGH$ nên $\frac{IG}{AG} = \frac{GN}{GH}$, suy ra bán kính mặt cầu

$$R = \frac{GA \cdot GN}{GH} = \frac{GA^2}{2GH}.$$

$$\text{Vì } GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2} \text{ nên } GA^2 = GH^2 + HA^2 = \frac{7}{12}a^2.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{7}{12}a.$$

Bài 2.4.7.

Gọi I là trung điểm của BC , ta có $AI \perp BC$.

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AI \perp (SBC)$

$\Rightarrow AI \perp SI \Rightarrow SI$ là đường cao của tam giác SBC .

Ta có $\triangle ABI = \triangle ASI \Rightarrow IS = IB = IC$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp

hình chóp $S.ABC$ ta có

$OS = OB = OC$ nên O thuộc

thẳng d qua I vuông góc với

(SBC) .

Ta có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow d \subset (ABC)$

$\Rightarrow O \in (ABC) \Rightarrow O$ là tâm đường

tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Gọi K là giao của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có: $AB^2 = ALAK = AL \cdot 2R \Rightarrow R = \frac{AB^2}{2AI}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } AI^2 &= AB^2 - BI^2 = a^2 - \frac{BC^2}{4} = a^2 - \frac{SB^2 + SC^2}{4} \\ &= a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \quad (0 < x < \sqrt{3}a) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$$

Bài 2.4.8.

1) Gọi V là thể tích tứ diện $ABMN$.

Ta tính được $V = \frac{AB^3}{12}$ là giá trị

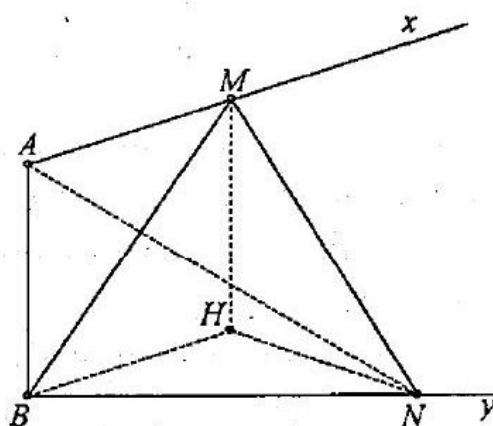
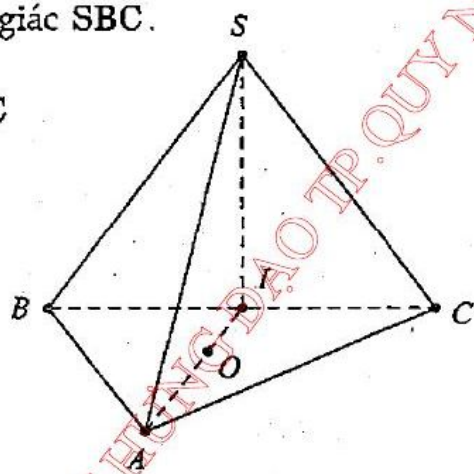
không đổi, mà $r = \frac{3V}{S_{tp}}$ nên r lớn

nhất khi S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $AB = 2a$, $AM = x$, $BN = y$.

Từ $AM + BN = MN$ suy ra $xy = 2a^2$.

Diện tích toàn phần của tứ diện là



$$S_{tp} = a(x + y) + \frac{1}{2}(y\sqrt{x^2 + 4a^2} + x\sqrt{y^2 + 4a^2}).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của S_{tp} đạt

$$\text{được khi } x = y = a\sqrt{2}, \text{ hay } AM = BN = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

2) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2}$ nên

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2} \geq \sqrt{2xy + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a.$$

min $R = 2\sqrt{2}a$ khi $x = y = a\sqrt{2}$, hay đạt được tương ứng với bán kính mặt cầu nội tiếp đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2.4.9. Từ đẳng thức

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Cho M lần lượt các vị trí A, B, C, D rồi cộng lại ta được hằng đẳng thức

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} VT &= GA + GB + GC + GD + 4R \geq 2\sqrt{(GA + GB + GC + GD) \cdot 4R} \\ &= 2\sqrt{4(GA \cdot OA + GB \cdot OB + GC \cdot OC + GD \cdot OD)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } GA \cdot OA \geq \overline{GA} \cdot \overline{OA} = \overline{GA} \cdot (\overline{OG} + \overline{GA}) = \overline{OG} \cdot \overline{GA} + GA^2$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &\geq 16 \left[\overline{OG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \right] \\ &= 16(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) \\ &= 4(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2) \\ &\geq 4 \cdot \frac{(AB + AC + AD + BC + BD + CD)^2}{6} = VP^2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức có khi $ABCD$ là tứ diện đều.

Bài 2.4.10. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và gọi Q là điểm thỏa mãn

$$\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} + \overline{QP} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overline{QG} + \overline{QP} = \vec{0} \quad (\text{điểm } Q \text{ chia đoạn } PG \text{ theo tỉ số } -4).$$

Vì G_a là trọng tâm của tứ diện $PBCD$ nên

$$\overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} + \overline{QP} = 4\overline{QG_a} \Rightarrow \overline{QA} + 4\overline{QG_a} = \vec{0}$$

Hay điểm Q nằm trên đường thẳng AG_a .

Tương tự, điểm Q cũng thuộc các đường thẳng BG_b, CG_c, DG_d .

Vậy các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại Q .

Ta có $4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GQ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{GP}$, hay Q là ảnh của P qua phép

vị tự tâm G , tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Vậy Q nằm trên mặt cầu là ảnh của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ qua phép vị tự tâm G , tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Chuyên đề 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG

5.1. Phương pháp giải:

1) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

- Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(I, R) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$
- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(I, R)$ tại hai điểm $A, B \Leftrightarrow d(I, \Delta) < R$.

Khi đó gọi H là hình chiếu của I lên Δ , ta có H là trung điểm AB và $IH^2 + AH^2 = R^2$

2) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

- Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I, R) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R$, khi đó tiếp điểm H là hình chiếu của tâm I lên mặt phẳng (P) .
- Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(I, R) \Leftrightarrow d(I, (P)) < R$, khi đó giao tuyến của chúng là đường tròn có tâm H là hình chiếu I lên (P) và bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - IH^2}.$$

3) Mặt cầu nội tiếp hình chóp:

- Là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp
- Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Khi đó I cách đều tất cả các mặt của hình chóp.
- Giả sử hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) có mặt cầu nội tiếp tâm I bán kính r . Gọi V là thể tích khối chóp và $\sum S$ là diện tích toàn phần của hình chóp. Khi đó $V = \frac{1}{3} \sum S.r$.

Nhận xét:

1. Từ công thức trên ta có công thức tính bán kính mặt cầu nội tiếp của một hình

chóp là $r = \frac{3V}{\sum S}$. Đối với một số bài toán việc xác tâm mặt cầu ngoại tiếp rất khó nên ta có thể vận dụng công thức trên để xác định bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

2. Đối với hình chóp đều tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp thuộc đường cao hình chóp.

5.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.5.1. Cho hình cầu tâm O bán kính R . Lấy một điểm A ở trên mặt cầu và gọi (P) là mp đi qua A sao cho góc giữa (P) và OA bằng 30° .

- 1) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (P) và mặt cầu.
- 2) Đường thẳng d đi qua A vuông góc với mp (P) cắt mặt cầu tại B . Tính độ dài đoạn AB .

Lời giải.

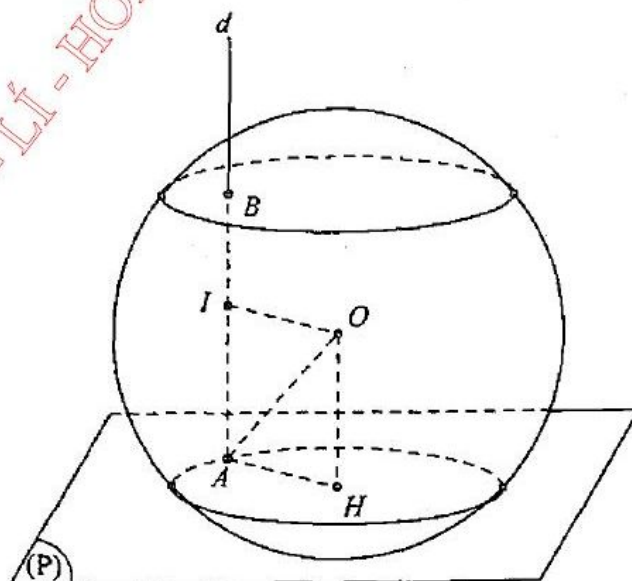
- 1) Gọi H là hình chiếu của O lên (P) . Khi đó $\widehat{OAH} = \widehat{(AO, (P))} = 30^\circ$.

Ta có bán kính của đường tròn thiết diện là: $r = AH = R \cdot \cos 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Diện tích thiết diện là $S = \pi r^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$.

- 2) Mặt phẳng (ABO) đi qua O nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn.

Gọi I là trung điểm của AB ta có $OI \perp AB$ nên tứ giác $OIAH$ là hình chữ nhật do đó $IA = OH = R \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$. Vậy $AB = 2AI = R$.

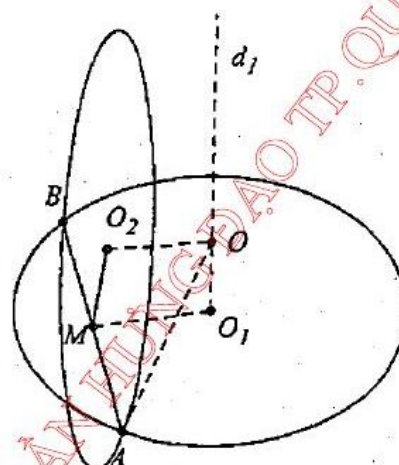


Ví dụ 2.5.2. Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

- 1) Chứng minh có mặt cầu đi qua hai đường tròn đó.
- 2) Tìm bán kính R của mặt cầu biết $r_1 = 5; r_2 = \sqrt{10}; AB = 6; O_1O_2 = \sqrt{21}$.

Lời giải.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là hai đường thẳng đi qua O_1, O_2 và vuông góc với (P) và (P'). Gọi M là trung điểm AB ta có $(MO_1O_2) \perp AB \Rightarrow d_1, d_2 \subset (MO_1O_2)$.
Gọi O là giao điểm của d_1 và d_2 .
Ta có O là tâm mặt cầu chứa (O_1) và (O_2) . Bán kính $R = OA$.



$$\text{Ta có } MO_1 = \sqrt{r_1^2 - MA^2} = 4;$$

$$MO_2 = \sqrt{r_2^2 - MA^2} = 1$$

Ta có tứ giác MO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp.

$$\cos M = \frac{MO_1^2 + MO_2^2 - O_1O_2^2}{2MO_1 \cdot MO_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{O_1OO_2} = 60^\circ$$

Đặt $x = OO_2, y = OO_1, z = OM$. Áp dụng định lí cosin cho $\triangle O_1OO_2$ ta có: $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 21$. (1).

Do tứ giác MO_1OO_2 nội tiếp nên

$$MO_1 \cdot OO_2 + MO_2 \cdot OO_1 = MO \cdot O_1O_2 \Leftrightarrow 4x + y = \sqrt{21} \cdot z. \quad (2)$$

$$OM^2 = MO_1^2 + O_1O_2^2 = MO_2^2 + O_2O_1^2 \Leftrightarrow z^2 = 16 + y^2 = 1 + x^2 \quad (3)$$

Giải hệ gồm ba phương trình (1), (2) và (3) ta tìm được

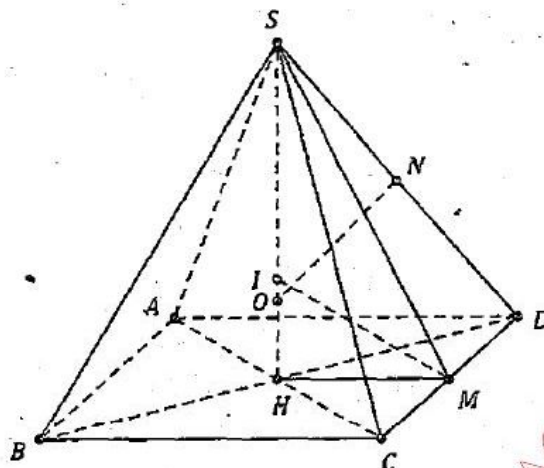
$$x = 3\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}; z = 2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow OA^2 = AO_1^2 + O_1O_2^2 = 37 \Rightarrow R = OA = \sqrt{37}.$$

Ví dụ 2.5.3. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

- 1) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- 2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
- 3) Tìm giá trị của α để tâm mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau.

Lời giải.



1) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SHA) kẻ đường trung trực cạnh SA cắt SH tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, bán kính $R = SO$.

Gọi N là trung điểm SA, ta có:

$$\triangle SNO \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{SN}{SO} = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác cân SAB ta có :

$$\frac{SA}{\sin(\frac{180^\circ - \alpha}{2})} = \frac{AB}{\sin \alpha} \Rightarrow SA = \frac{AB}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Vậy } R = SO = \frac{a}{4 \sqrt{\cos \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

2) Tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của AB, ta có $AB \perp (SHM)$ tại M. Gọi I là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{SMH}$ ($I \in SH$). Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp. Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH \cdot MH}{MS + MH};$$

$$SM = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}, MH = \frac{a}{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $r = IH = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}$.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \frac{3V}{\sum S}$.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{3 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

$$\sum S = 4S_{\triangle SAB} + S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} SM \cdot AB + a^2 = \frac{a^2(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Bán kính $r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}$.

3) Tâm của hai hình cầu trùng nhau $\Leftrightarrow R + r = SH$.

Hay: $\frac{a}{4\sqrt{\cos \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin \alpha - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy khi $\alpha = 45^\circ$ thì tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

Ví dụ 2.5.4. Giả sử mặt cầu có tâm I thuộc cạnh AB , bán kính r_I tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC và BD ; mặt cầu tâm J thuộc cạnh CD , bán kính r_J tiếp xúc với các cạnh CA, CB, DA, DB của hình tứ diện $ABCD$.

Chứng minh: $\frac{AB^4}{CD^4} = \frac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}$.

Lời giải.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của mặt cầu tâm I với các cạnh AD, BD, AC, BC .

Ta có $BN = BQ, IN = IQ = r_I$ nên $\triangle IBN = \triangle IBQ$ suy ra $\widehat{IBN} = \widehat{IBQ}$.

Tương tự $\widehat{IAP} = \widehat{IAM}$ nên $\triangle CAB = \triangle DAB$.

Do đó $AC = AD, BC = BD$ (1).

Tương tự cho mặt cầu tâm J ta có $DA = DB, CA = CB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $CA = CB = DA = DB = a$.

Vì DI là phân giác góc $\widehat{ADB}$ và tam giác ADB cân tại D nên I là trung điểm của AB. Cũng như thế, J là trung điểm của CD. Đặt $AB = 2x, CD = 2y$.

Ta có $ID = \sqrt{a^2 - x^2}$ và $S_{DAB} = 2S_{DIB}$ nên

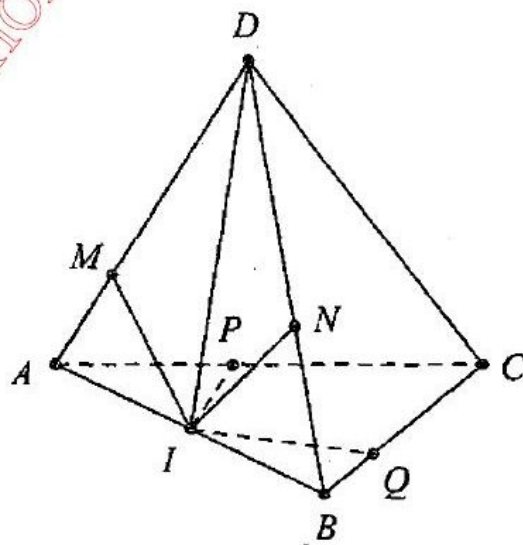
$$AB.ID = 2IN.DB \Leftrightarrow x.\sqrt{a^2 - x^2} = r_I.a \Leftrightarrow r_I = \frac{x.\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

$$\text{Tương tự } r_J = \frac{y.\sqrt{a^2 - y^2}}{a}.$$

$$\text{Vậy } CD^2 - 4r_J^2 = 4y^2 - 4\frac{y^2.(a^2 - y^2)}{a^2} = 4\frac{y^4}{a^2} \Rightarrow a^2(CD^2 - 4r_J^2) = 4CD^4$$

$$AB^2 - 4r_I^2 = 4x^2 - 4\frac{x^2.(a^2 - x^2)}{a^2} = 4\frac{x^4}{a^2} \Rightarrow a^2(AB^2 - 4r_I^2) = 4AB^4$$

$$\text{Do đó } \frac{4AB^4}{4CD^4} = \frac{a^2(AB^2 - 4r_I^2)}{a^2(CD^2 - 4r_J^2)}, \text{ hay } \frac{AB^4}{CD^4} = \frac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}.$$



Ví dụ 2.5.5. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$,
 $\widehat{CAD} = 60^\circ$, $\widehat{DAB} = 90^\circ$. Xác định bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Lời giải.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

Tam giác ACD đều nên $CD = a$.

Vì $\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BD = \sqrt{2}a$.

$$\text{Ta có } BC^2 + CD^2 = 3a^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow \triangle BCD \text{ vuông tại D.}$$

Gọi H là trung điểm của BC
 ta có $AH \perp BC$ (1).

$$AH = AB \sin 30^\circ = \frac{a}{2};$$

$$DH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AH^2 + DH^2 = a^2 = AD^2 \Rightarrow AH \perp DH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD)$ nên AH là đường cao của tứ diện ABCD.

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

Diện tích toàn phần của tứ diện:

$$\sum S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a^2}{2}$$

$$\text{Gọi } r \text{ là bán kính mặt cầu nội tiếp, ta có } r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{\sqrt{2}a}{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}.$$

Ví dụ 2.5.6. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, nội tiếp trong một mặt cầu (O; R). Các đường thẳng GA, GB, GC, GD lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh rằng $V_{ABCD} \leq V_{A'B'C'D'}$.

Lời giải.

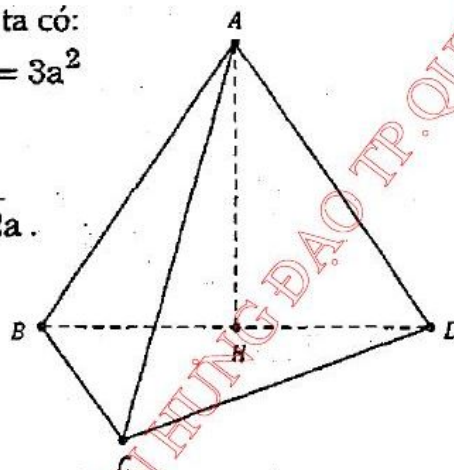
Theo tính chất phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta có

$$GA \cdot GA' = GB \cdot GB' = GC \cdot GC' = GD \cdot GD' = R^2 - OG^2.$$

Với mọi điểm M ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2$$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên suy ra



$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

$$\text{Cho } M \equiv O \text{ thì } GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2).$$

$$\text{Vì thế } 4 = \frac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2}.$$

$$= \frac{GA^2}{GA \cdot GA'} + \frac{GB^2}{GB \cdot GB'} + \frac{GC^2}{GC \cdot GC'} + \frac{GD^2}{GD \cdot GD'} \geq 4 \sqrt{\frac{GA}{GA'} \cdot \frac{GB}{GB'} \cdot \frac{GC}{GC'} \cdot \frac{GD}{GD'}}$$

$$\text{Hay } \frac{GA'}{GA} \cdot \frac{GB'}{GB} \cdot \frac{GC'}{GC} \cdot \frac{GD'}{GD} \geq 1 \quad (1).$$

Mặt khác, do G là trọng tâm của tứ diện nên

$$\begin{aligned} \frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} &= \frac{V_{GB'C'D'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{V_{ABCD}} \\ &= \frac{V_{GB'C'D'}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{4V_{GCDA}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{4V_{GABC}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{GB' \cdot GC' \cdot GD'}{GB \cdot GC \cdot GD} + \frac{GC' \cdot GD' \cdot GA'}{GC \cdot GD \cdot GA} + \frac{GD' \cdot GA' \cdot GB'}{GD \cdot GA \cdot GB} + \frac{GA' \cdot GB' \cdot GC'}{GA \cdot GB \cdot GC} \right) \\ &\geq 4 \sqrt{\frac{GA'}{GA} \cdot \frac{GB'}{GB} \cdot \frac{GC'}{GC} \cdot \frac{GD'}{GD}} \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $G \equiv O$, hay ABCD là tứ diện đều.

5.3. Bài tập luyện tập

Bài 2.5.1. Cho hình chóp đều S.ABCD đỉnh S, cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

- 1) Tính các bán kính R và r của hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng hình chóp đó.
- 2) Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp, hình cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp. Xác định quan hệ giữa a và h sao cho:

- a) $\frac{V_2}{V}$ đạt giá trị lớn nhất.
- b) $\frac{V_2}{V_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2.5.2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đường cao $SO = 1$ và cạnh đáy của tam giác ABC bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, AC tương ứng. Tìm bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp S.AMN.

Bài 2.5.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh 2a, góc $\angle ABC = 60^\circ$. Đường cao $SO = b$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Bài 2.5.4. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$. Hai mặt ACD và BCD là những tam giác đều cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB .

- 1) Xác định x khi DM là đường cao của tứ diện $ABCD$.
- 2) Giả sử DM vuông góc với $mp(ABC)$. Tính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 2.5.5. Cho hình cầu bán kính R . Từ một điểm S trên mặt cầu vẽ ba cát tuyến bằng nhau cắt mặt cầu tại A, B, C sao cho $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Tìm α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

Bài 2.5.6. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với đáy một góc 45° . Một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh bên BS kéo dài tại H . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm I của mặt cầu và trung điểm đường cao BD của đáy. Tính bán kính cầu đó.

Hướng dẫn giải

Bài 2.5.1.

1) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \frac{2h^2 + a^2}{4h}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp $r = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$.

2)

a) Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}a^2h$.

Thể tích hình cầu ngoại tiếp $V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Thể tích hình cầu nội tiếp $V_2 = \frac{4\pi r^3}{3}$.

$$\text{Suy ra } \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{1}{3}a^2h} = \frac{4\pi \left(\frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}} \right)^3}{a^2h} = \frac{4\pi ah^2}{\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2} \right)^3}.$$

Đặt $\tan \alpha = \frac{2h}{a}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Khi đó $\frac{V_2}{V} = \frac{4\pi(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{4\pi(1 - t)t}{(1 + t)^2} = f(t), t = \cos \alpha, (0 < t < 1).$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{4\pi(1-3t)}{(1+t)^3}, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max \frac{V_2}{V} = \frac{\pi}{2}, \text{ khi } h = \sqrt{2}a.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{V_2}{V_1} = \frac{r}{R} = \frac{4ah^2}{(2h^2 + a^2)(a + \sqrt{4h^2 + a^2})}.$$

$$\text{Tương tự ta tìm được } \frac{V_2}{V_1} \text{ lớn nhất khi } h = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}.$$

Bài 2.5.2. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có MN là đường trung bình của tam giác đều nên

$$S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích hình chóp } S.AMN: V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bán kính r mặt cầu nội tiếp hình chóp S.AMN

$$\text{Ta có: } \sum S = S_{SAM} + S_{SAN} + S_{SMN} + S_{AMN} = \frac{14\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Mà } V = \frac{1}{3}r \cdot \sum S \Rightarrow r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{3}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}.$$

Bài 2.5.3. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có O là hình thoi nên O cách đều bốn cạnh của hình thoi.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên CD và CB thì H, K cũng là hình chiếu của S lên CD, CB.

Gọi I thuộc SO, Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I lên SH, SK, ta có IE, IF lần lượt là khoảng cách từ I đến mp(SCD) và mp(SCB).

$$\text{Ta có } IE = \frac{SI \cdot HO}{SH}, IF = \frac{SI \cdot KO}{SK}, \text{ do } HO = KO \text{ và } SH = SK \text{ nên } IE = IF.$$

Vậy khoảng cách từ I đến các mp(SCD) và (SCB). Chứng minh tương tự ta có I cách đều các mặt bên của hình chóp. Từ đó suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp nằm trên đường cao SO. Gọi I là tâm mặt cầu thì I là chân đường phân giác góc SHO.

$$\text{Ta có } OH = \frac{\sqrt{3}a}{2}, SH = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2},$$

$$\frac{IS}{IO} = \frac{HS}{HO} \Rightarrow \frac{IS + IO}{IO} = \frac{HS + HO}{HO}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{HO \cdot SO}{HO + HS} = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a + \sqrt{3a^2 + 4b^2}}$$

$$\text{Vậy bán kính } r = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a + \sqrt{3a^2 + 4b^2}}$$

Bài 2.5.4.

1) Ta có $AB \perp (CDM) \Rightarrow DM \perp AB$.

Khi $DM \perp CM$ thì $DM \perp (ABC)$ nên DM là đường cao của tứ diện.

Khi đó tam giác CDM vuông cân tại D nên suy ra $DM = \frac{CD}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta có } x = AB = 2MB = 2\sqrt{BD^2 - DM^2} = 2\sqrt{CD^2 - \frac{CD^2}{2}} = \sqrt{2}CD.$$

2) Thể tích tứ diện $V = \frac{\sqrt{2}}{12}CD^3$.

Diện tích toàn phần của tứ diện:

$$\sum S = 2S_{ACD} + 2S_{ABD} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}CD^2$$

$$\text{Gọi } r \text{ là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ta có: } r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}.$$

Bài 2.5.5.

Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$ nên $AB = BC = CA$

Kẻ $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA = HB = HC$

hay $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

Gọi P là giao của SH với mặt cầu, M

là giao của AH và BC thì $MB = MC$

Và $SP = 2R, \widehat{SAP} = 90^\circ$

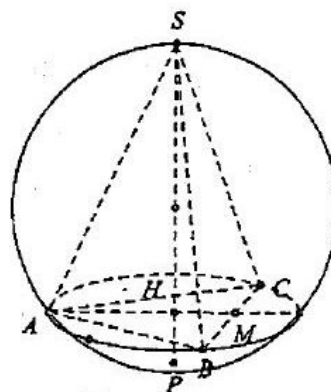
Đặt $SA = SB = SC = x$, ta có:

$$x^2 = SA^2 = SH \cdot SP \Rightarrow SH = \frac{x^2}{2R}$$

$$\text{Ta có } MC = x \sin \frac{\alpha}{2} \text{ nên } BC = 2x \sin \frac{\alpha}{2}; AM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Mà } SC^2 = SH^2 + HC^2 = SH^2 + \left(\frac{2}{3}AM\right)^2$$

$$\text{Suy ra } x^2 = \frac{x^2}{4R^2} + \frac{4}{3}x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}R^2 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$



$$\text{Do vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số dương ta có:

$$\begin{aligned} & 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ & \leq \left(\frac{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3} \right)^3 = 8 \end{aligned}$$

Do đó $V_{S.ABC} \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$, đẳng thức xảy ra khi $\alpha = 60^\circ$.

Vậy $\max S_{S.ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$, đạt được khi $\alpha = 60^\circ$.

Bài 2.5.6.

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Ta có $IA \perp (ABC)$, $BS \perp IH$, $IA = IH = R$. Gọi O là tâm của đáy, hạ

$IK \perp SO$. Vì $\widehat{SBO} = 45^\circ \Rightarrow SO = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

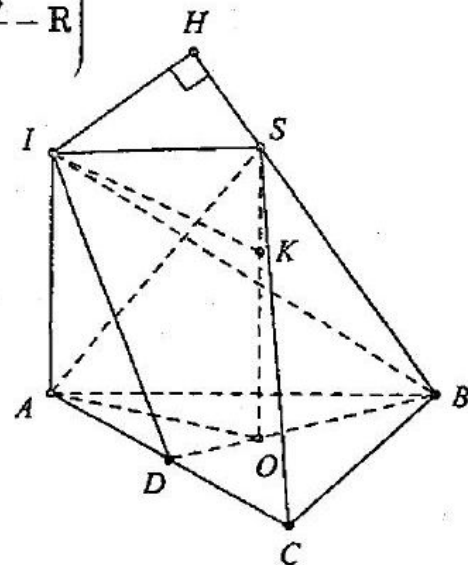
Tứ giác $IAOK$ là hình chữ nhật nên $IA = OK = R$; $IK = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$$SK = SO - IA = \frac{a\sqrt{3}}{3} - R; HS = BH - BS = BA - BS = a - \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vì $IH^2 + HS^2 = IK^2 + SK^2$ nên suy ra

$$R^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{6}}{3} \right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - R \right)^2$$

$$\text{Ta tìm được } R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}.$$



Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Chuyên đề 1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VEC TƠ

1.1. Phương pháp:

- Dựa vào định nghĩa tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ
- Dựa vào các phép toán véc tơ.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ và số thực k . Khi đó:

$$* \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$* k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$$

$$* \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}, \text{ do đó: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

$$* |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$* \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$* \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

$$* \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Cho $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$, $C = (x_C; y_C; z_C)$, $D = (x_D; y_D; z_D)$.

Khi đó:

$$* \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$* AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

1.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.1.1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$$

1) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ và tính $|\vec{x}|$

2) Tìm giá trị của x để véc tơ $\vec{y} = (2x - 1; -x; 3x + 2)$ vuông góc với véc tơ $2\vec{b} - \vec{c}$.

3) Chứng minh rằng các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và phân tích véc tơ $\vec{u} = (3; 7; -14)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải.

1) Ta có: $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (0; -3; 4), \vec{c} = (-1; -2; 0)$.

Suy ra $3\vec{a} = (6; 9; -15), 2\vec{b} = (0; -6; 8) \Rightarrow \vec{x} = (6; 3; -7)$

Do đó: $|\vec{x}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{94}$.

2) Ta có: $2\vec{b} - \vec{c} = (1; -4; 8)$, nên $\vec{y}$ vuông góc với $2\vec{b} - \vec{c}$ khi và chỉ khi

$$\vec{y} \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (2x - 1) - 4 \cdot (-x) + 8(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

3) Cách 1: Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3; -8; -6) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 3 + 16 = 19 \neq 0$

Nên ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2. Giả sử ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Khi đó tồn tại hai số thực x, y sao cho $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ (1)

$$\text{Mà } x\vec{b} + y\vec{c} = (-y; -3x - 2y; 4x) \text{ nên (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2 \\ -3x - 2y = 3 \\ 4x = -5 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

ngiêm.

Vậy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Giả sử $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ (2)

Do $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = (2m - p; 3m - 3n - 2p; -5m + 4n)$ nên (2) tương

$$\text{đương với } \begin{cases} 2m - p = 3 \\ 3m - 3n - 2p = 7 \\ -5m + 4n = -14 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2, n = -1, p = 1$$

Vậy $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ví dụ 3.1.2. Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$

1) Tính $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

2) Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lời giải.

1) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$

$$\Rightarrow (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 2^2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 52$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}.$$

2) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a}(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ và $|\vec{x}| = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b})^2} = 6$

Suy ra $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{a}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{6}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\vec{a}, \vec{x}} = 60^\circ.$

Ví dụ 3.1.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(3; -2; 4)$

- 1) Tìm tọa độ các hình chiếu của A lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ
- 2) Tìm $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A
- 3) Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1; 4; -4)$.

Lời giải.

- 1) Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz.

B_1, B_2, B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Ozx).

Ta có: $A_1(3; 0; 0), A_2(0; -2; 0), A_3(0; 0; 4)$ và

$B_1(3; -2; 0), B_2(0; -2; 4), B_3(3; 0; 4)$.

- 2) Do $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0; 0), N \in Oy \Rightarrow N(0; n; 0)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (m - 3; 2; -4), \overrightarrow{AN} = (-3; n + 2; -4)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \\ AM^2 = AN^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(m - 3) + 2(n + 2) + 16 = 0 \\ (m - 3)^2 + 2^2 + (-4)^2 = (-3)^2 + (n + 2)^2 + (-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = \frac{2(n + 2) + 16}{3} \quad (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{2(n + 2) + 16}{3} \right]^2 = (n + 2)^2 + 5 \quad (2)$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 4(n + 2)^2 + 64(n + 2) + 256 = 9(n + 2)^2 + 45$

$$\Leftrightarrow 5(n + 2)^2 - 64(n + 2) - 211 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n+2 = \frac{32+3\sqrt{231}}{5} \\ n+2 = \frac{32-3\sqrt{231}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{22 \pm 3\sqrt{231}}{5} \\ m = \frac{189 \pm 6\sqrt{231}}{15} \end{cases}$$

Vậy có hai bộ thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$M_1 \left(\frac{189+6\sqrt{231}}{15}; 0; 0 \right), N_1 \left(0; \frac{22+3\sqrt{231}}{5}; 0 \right) \text{ hoặc}$$

$$M_2 \left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15}; 0; 0 \right), N_2 \left(0; \frac{22-3\sqrt{231}}{5}; 0 \right).$$

3) Vì $E \in (Oyz)$ nên $E(0; y; z)$

$$\text{Suy ra } \overline{AE} = (-3; y+2; z-4), \overline{BE} = (1; y-4; z+4)$$

$$\Rightarrow [\overline{AE}, \overline{BE}] = (8y+6z-8; 4z+8; 10-4y)$$

Nên từ giả thiết bài toán ta có:

$$\begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ \frac{1}{2} \|\overline{AE}, \overline{BE}\| = 3\sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ \|\overline{AE}, \overline{BE}\|^2 = 1044 \end{cases}$$

$$AE^2 = BE^2 \Leftrightarrow 9 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1 + (y-4)^2 + (z+4)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4z+1}{3}$$

$$\|\overline{AE}, \overline{BE}\|^2 = 1044 \Leftrightarrow (8y+6z-8)^2 + (4z+8)^2 + (10-4y)^2 = 1044$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{50z-16}{3} \right)^2 + (4z+8)^2 + \left(\frac{26-16z}{3} \right)^2 - 1044 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2, z = -\frac{34}{25}$$

$$\bullet z = 2 \Rightarrow y = 3 \text{ nên } E(0; 3; 2).$$

$$\bullet z = -\frac{34}{25} \Rightarrow y = -\frac{37}{25} \text{ nên } \left(0; -\frac{37}{25}; -\frac{34}{25} \right).$$

Chú ý: Cho $A(a; b; c)$. Khi đó

• Tọa độ các hình chiếu của A lên các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) là:

$$A_1(a; b; 0), A_2(0; b; c), A_3(a; 0; c).$$

• Tọa độ các hình chiếu của A lên các trục Ox , Oy là:

$$A_1(a; 0; 0), A_2(0; b; 0), A_3(0; 0; c).$$

Ví dụ 3.1.4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $A(1; 0; 1)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$. Thể tích của khối lăng trụ bằng 3.

- 1) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của lăng trụ
- 2) Xác định tọa độ điểm cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ.

Lời giải.

- 1) Ta có $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 1; -1)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 1)$.

$$\text{Do đó } S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích của khối lăng trụ là 3 nên $AA' = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \sqrt{6}$.

Từ $\overrightarrow{AA'} = t \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (t; 2t; t)$ suy ra $|t| = 1$.

• Nếu $t = 1$ thì $A'(2; 2; 2)$, $B'(3; 2; 1)$, $C'(1; 3; 1)$.

• Nếu $t = -1$ thì $A'(0; -2; 0)$, $B'(1; -2; -1)$, $C'(-1; -1; -1)$.

- 2) Điểm I cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ là trung điểm của đường nối tâm hai đáy.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

• Với $B'(3; 2; 1)$, $C'(1; 3; 1)$ thì $M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M'\left(2; \frac{5}{2}; 1\right) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

• Với $B'(1; -2; -1)$, $C'(-1; -1; -1)$ thì $M'\left(0; -\frac{3}{2}; -1\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 3.1.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $A' \in Oz$ và $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$.

- 1) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp.
- 2) Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$.
- 3) Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD$, $MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD .

Lời giải.

- 1) Ta có $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A'(0; 0; 3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C , hình chiếu của C lên Oz là A' nên $C(1; 2; 0)$.

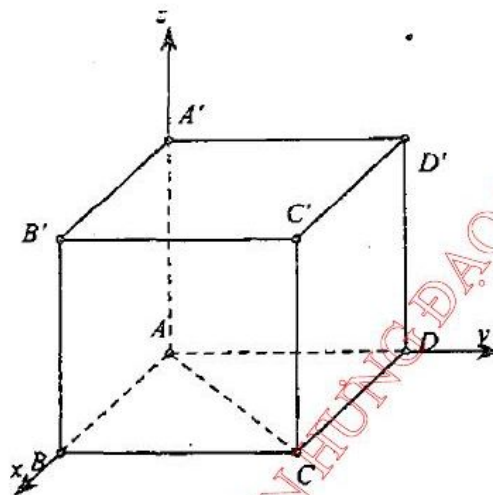
Hình chiếu của B', C', D' lên mp (Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1; 0; 3)$, $C'(1; 2; 3)$, $D'(0; 2; 3)$.

- 2) Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0; 2; z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1; 2; z-3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3)$ nên

$$\overrightarrow{B'E} \perp \overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow -1 + 4 - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$$

Vậy $E(0; 2; 4)$.



- 3) Đặt $\overrightarrow{A'M} = x\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x\overrightarrow{A'C} = (x; 2x; 3-3x)$, suy ra $M(x; 2x; 3-3x)$.

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BD} = (1-y; 2y; 0) \Rightarrow N(1-y; 2y; 0).$$

Theo giả thiết của đề bài, ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{MN} = (1-x-y; 2y-2x; 3x-3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 2; 0)$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{53}{61} \\ y=\frac{44}{61} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } M\left(\frac{53}{61}; \frac{106}{61}; \frac{24}{61}\right), N\left(\frac{17}{61}; \frac{88}{61}; 0\right).$$

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng A'C, BD nên

$$d(A'C, BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Chú ý: Khi cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ ta có thể gắn hệ trục tọa độ để chuyển về bài toán tọa độ trong không gian.

1.3. Bài tập

Bài 1.1.3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}, \quad \vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

- 1) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- 2) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ và tính $|\vec{u}|$.
- 3) Tìm x để véc tơ $\vec{v} = (3x - 1; x + 2; 3 - x)$ vuông góc với $\vec{b}$.
- 4) Biểu diễn véc tơ $\vec{x} = (3; 1; 7)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Bài 3.1.2. Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính

- 1) Độ dài các véc tơ $\vec{a} + \vec{b}, 5\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 2) Độ dài véc tơ $[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, 3\vec{b}], [5\vec{a}, -2\vec{b}]$.

Bài 3.1.3. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$$A(0; 2; 0), B(-1; 0; -3), C(0; -2; 0), D(3; 2; 1).$$

- 1) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.
- 2) Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD.
- 3) Tính thể tích tứ diện ABCD và đường cao của tứ diện hạ từ A.
- 4) Tìm tọa độ E sao cho ABCE là hình bình hành.
- 5) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD.
- 6) Tìm điểm M thuộc Oy sao cho tam giác BMC cân tại M.
- 7) Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD và chứng minh A, G, A' thẳng hàng với A' là trọng tâm tam giác BCD.

Bài 3.1.4. Cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

- 1) Tìm tọa độ điểm D biết ABCD là tứ diện đều.
- 2) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Bài 3.1.5. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

có $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, A' \in Oz$ và $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$.

- 1) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp.
- 2) Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$
- 3) Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD$, $MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD.

Hướng dẫn giải

Bài 1.1.3.

1) Ta có $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = (0; 2; -3)$.

2) Ta có: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = (1; -2; 16) \Rightarrow |\vec{u}| = 3\sqrt{29}$.

3) Ta có: $\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1(3x - 1) + 2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$.

4) Giả sử: $\vec{x} = k\vec{a} + p\vec{b} + l\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k - p = 3 \\ 3k + 2l = 1 \\ -k + 2p - 3l = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{29}{15} \\ p = \frac{13}{15} \\ l = -\frac{21}{5} \end{cases}$

Vậy $\vec{x} = \frac{29}{15}\vec{a} + \frac{13}{15}\vec{b} - \frac{12}{5}\vec{c}$.

Bài 3.1.2.

Do $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ nên ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$.

1) Sử dụng công thức

$$|\vec{m}\vec{a} + \vec{n}\vec{b}| = \sqrt{(\vec{m}\vec{a} + \vec{n}\vec{b})^2} = \sqrt{m^2\vec{a}^2 + 2mn\vec{a}\vec{b} + n^2\vec{b}^2}.$$

Ta tính được $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{39}$, $|5\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{129}$, $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$.

2) Sử dụng công thức $|\vec{m}\vec{a}, \vec{n}\vec{b}| = |m.n| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{m}\vec{a}, \vec{n}\vec{b})$.

Với chú ý $(\vec{a}, 3\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $(5\vec{a}, -2\vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Bài 3.1.3.

1) Ta có $\vec{BA} = (1; 2; 3)$, $\vec{BC} = (1; -2; 3)$, $\vec{BD} = (4; 2; 4)$, $\vec{CD} = (3; 4; 1)$

Suy ra $[\vec{BC}, \vec{BD}] = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-14; 8; 10)$

Do đó $\vec{BA} \cdot [\vec{BC}, \vec{BD}] = 32 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng.

2) Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \|\vec{BC}, \vec{BD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-14)^2 + 8^2 + 10^2} = 3\sqrt{10}$

Vì $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BH \cdot CD$ nên suy ra $BH = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{65}}{13}$.

3) Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\vec{BA} \cdot [\vec{BC}, \vec{BD}]| = \frac{16}{3}$.

$$\text{Gọi } h = d(A, (BCD)) \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{16}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{15}.$$

4) Gọi $E(x; y; z)$.

$$ABCE \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 2 = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Vậy $E(1; 0; 3)$.

5) Ta có: $\overrightarrow{AC} = (0; -4; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -8$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{8}{4 \cdot 6} = \frac{1}{3}.$$

6) Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$. Tam giác BMC cân tại $M \Leftrightarrow MC^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 + y^2 + 3^2 = (y + 2)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } M(0; \frac{3}{2}; 0).$$

7) Ta có: $A'(\frac{2}{3}; 0; -\frac{2}{3})$, $G(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (\frac{2}{3}; -2; -\frac{2}{3}), \overrightarrow{AG} = (\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$$

$$\text{Mà } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AG} \Rightarrow A, A', G \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 3.1.4. Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x; y; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3; 0; -3)$, $\overrightarrow{AC}(x-5; y-3; 1)$, $\overrightarrow{BC}(x-2; y-3; 4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB = AC = BC$, do đó

$$\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = 18 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 4 \\ x = 1; y = 2 \end{cases}.$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1; 2; 0)$.

1) Gọi $D(x; y; z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5; y-3; z+1)$, $\overrightarrow{BD}(x-2; y-3; z+4)$, $\overrightarrow{CD}(x-1; y-2; z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ (x-5)^2 + (16-5x)^2 + (2-x)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2 - 16x + 20 = 0$ ta được $\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2; 6; -1)$ hoặc $D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

2) Gọi $S(x; y; z)$.

Ta có: $\overline{AS}(x-5; y-3; z+1)$, $\overline{BS}(x-2; y-3; z+4)$, $\overline{CS}(x-1; y-2; z)$

SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{AS} \cdot \overline{BS} = 0 \\ \overline{BS} \cdot \overline{CS} = 0 \\ \overline{CS} \cdot \overline{AS} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-2) + (y-3)^2 + (z+1)(z+4) = 0 \\ (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z+4)z = 0 \\ (x-1)(x-5) + (y-2)(y-3) + z(z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 6y + 5z = -23 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y + 4z = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4z = 12 \\ -3x - 3z = -3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 11 \\ x = 1 - z \\ 3z^2 + 10z + 8 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2 + 10z + 8 = 0$ ta được $z = -2; z = -\frac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3; 1; -2)$, $S\left(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Bài 3.1.5

- 1) Ta có $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A'(0; 0; 3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C , hình chiếu của C lên Oz là A' nên $C(1; 2; 0)$.

Hình chiếu của B', C', D' lên mp(Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1; 0; 3)$, $C'(1; 2; 3)$, $D'(0; 2; 3)$.

- 2) Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0; 2; z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1; 2; z-3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0$

$$\Leftrightarrow -1 + 4 - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4. \text{ Vậy } E(0; 2; 4).$$

- 3) Đặt $\overrightarrow{A'M} = x \cdot \overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y \cdot \overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x \cdot \overrightarrow{A'C} = (x; 2x; 3-3x)$, suy ra

$$M(x; 2x; 3-3x)$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{BD} = (1-y; 2y; 0) \Rightarrow N(1-y; 2y; 0).$$

Theo giả thiết của đề bài, ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MN} = (1-x-y; 2y-2x; 3x-3), \overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3), \overrightarrow{BD} = (-1; 2; 0)$$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{53}{61} \\ y=\frac{44}{61} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } M\left(\frac{53}{61}; \frac{106}{61}; \frac{24}{61}\right), N\left(\frac{17}{61}; \frac{88}{61}; 0\right).$$

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C, BD$ nên

$$d(A'C, BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Chuyên đề 2. ỨNG DỤNG TÍCH CÓ HƯỚNG

2.1. Phương pháp giải.

- Diện tích tam giác: Diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\|.$$

- Thể tích:

+) Hình hộp: Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' được tính bởi công thức $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left\| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\| \cdot \overrightarrow{AA'}$

+) Tứ diện: Thể tích tứ diện ABCD được tính bởi công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left\| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \overrightarrow{AD}.$$

- Điều kiện 3 véc tơ đồng phẳng:

+) Ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a}, \vec{b} \right] \cdot \vec{c} = 0$.

+) Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

2.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.2.1. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$$A(4; 2; 1), B(-1; 0; 3), C(2; -2; 0), D(-3; 2; 1).$$

- 1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng;
- 2) Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD;
- 3) Tính thể tích tứ diện ABCD và đường cao của tứ diện hạ từ A;
- 4) Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{BA} = (5; 2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -2; -3)$,

$$\overrightarrow{BD} = (-2; 2; -2), \overrightarrow{CD} = (-5; 4; 1).$$

$$\text{Suy ra } \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (10; 12; 2)$$

Nên $\overrightarrow{BA} \cdot \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = 70 \neq 0$. Do đó, ta có A, B, C, D không đồng phẳng.

2) Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 12^2 + 2^2} = \sqrt{62}$.

$$\text{Vì } S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BH \cdot CD \text{ nên suy ra } BH = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \frac{2\sqrt{62}}{\sqrt{42}} = \frac{2\sqrt{651}}{21}.$$

3) Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BA} \cdot [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{35}{3}$.

Gọi $h = d(A, (BCD))$, thế thì $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{35}{\sqrt{62}}$.

4) Ta có phương trình AB: $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$, suy ra $M(4 + 5t; 2 + 2t; 1 - 2t)$

Do đó: $\overrightarrow{CM} = (2 + 5t; 4 + 2t; 1 - 2t) \Rightarrow [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}] = (10t; 5t - 7; 30t + 28)$

Suy ra $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1025t^2 + 1610t + 833}$

Do $1025t^2 + 1610t + 833 = 1025 \left(t + \frac{161}{205}\right)^2 + \frac{8232}{41} \geq \frac{8232}{41}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = -\frac{161}{205}$.

Vậy $S_{\Delta MCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -\frac{161}{205}$ hay $M\left(\frac{3}{41}; \frac{88}{205}; \frac{527}{205}\right)$.

Ví dụ 3.2.2. Trong không gian Oxyz cho $A(4; 0; 0)$, $B(x_0; y_0; 0)$ với $x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\angle AOB = 45^\circ$.

- 1) Tìm tọa độ điểm C nằm trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 8.
- 2) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox, điểm N thuộc Oz sao cho tam giác AMB cân tại M và tứ diện ABMN có thể tích bằng 20.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$, $\overrightarrow{OB} = (x_0; y_0; 0)$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4x_0$.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x_0 - 4)^2 + y_0^2 = 40 \\ \frac{4x_0}{4\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 = 24 \\ \sqrt{2}x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = x_0^2 \\ x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow B(6; 6; 0).$$

- 1) Vì C nằm trên tia Oz nên $C(0; 0; m)$ với $m > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 6; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; 0; 24)$, $\overrightarrow{OC} = (0; 0; m)$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC} = 24m.$$

$$\text{Do đó } V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 24m = 8 \Leftrightarrow m = 2. \text{ Vậy } C(0; 0; 2).$$

2) Theo giả thiết ta có $M(x; 0; 0)$. Ta có tam giác AMB cân tại M nên ta có:

$$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 = (x-6)^2 + 6^2 \Leftrightarrow x = 14 \Rightarrow M(14; 0; 0)$$

$$\text{Gọi } N(0; 0; n), \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = (10; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = (0; 0; 60)$$

$$\text{Do đó: } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{AN} = 60n \Rightarrow V_{ABMN} = 10|n|$$

$$\text{Suy ra } V_{ABMN} = 20 \Leftrightarrow n = \pm 2.$$

$$\text{Vậy } N(0; 0; \pm 2), M(14; 0; 0).$$

Ví dụ 3.2.3. Trong không gian Oxyz cho tứ diện đều ABCD có $A(3; -1; 2)$ và $G(1; 1; 1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC đi qua $M(4; 4; -\frac{7}{2})$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích khối tứ diện đó.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG} = (-2; 2; -1), \overrightarrow{AM} = (1; 5; -\frac{11}{2})$$

$$\text{Suy ra } \vec{n} = \overrightarrow{AG} \wedge 2\overrightarrow{AM} = (-12; -24; -24) \text{ vuông góc với } (ABC)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{n}_{ABC} = (6; 3; -6) \text{ song song với BC.}$$

$$\text{Gọi } a \text{ là cạnh của tứ diện ABCD, ta có } AG = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} = t\vec{u} \Rightarrow B\left(4 + 2t; 4 + t; -\frac{7}{2} - 2t\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(2t + 1; t + 5; -2t - \frac{11}{2}\right)$$

$$\text{Nên ta được phương trình: } (2t + 1)^2 + (t + 5)^2 + \left(2t + \frac{11}{2}\right)^2 = 27$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } B\left(-\sqrt{3}; \frac{4 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\sqrt{3}; \frac{4 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Do } DG \perp (ABC) \text{ nên phương trình } \overrightarrow{GD} = t\vec{n}, \text{ suy ra } D(1 + t; 1 + 2t; 1 + 2t)$$

$$\text{Mà } GD = \sqrt{DA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 3|t| = 3\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

Do đó $D(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$ hoặc $D(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2})$.

$$\text{Thể tích của tứ diện: } V = \frac{1}{3} DG \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{6}}{4} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 3.2.4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $A \equiv O$, B thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

- 1) Xác định tọa độ các đỉnh của hình chóp.
- 2) Chứng minh rằng $\triangle SCD$ vuông, tính diện tích tam giác SCD và tính $\cos$ của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
- 3) Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.
- 4) Trên các cạnh SA, SB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $SM = MA$, $SN = 2NB$, $BP = 3PC$, $CQ = 4QD$. Chứng minh rằng M, N, P, Q không đồng phẳng và tính thể tích khối chóp MNPQ.

Lời giải.

- 1) Ta có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $C(a; a; 0)$.

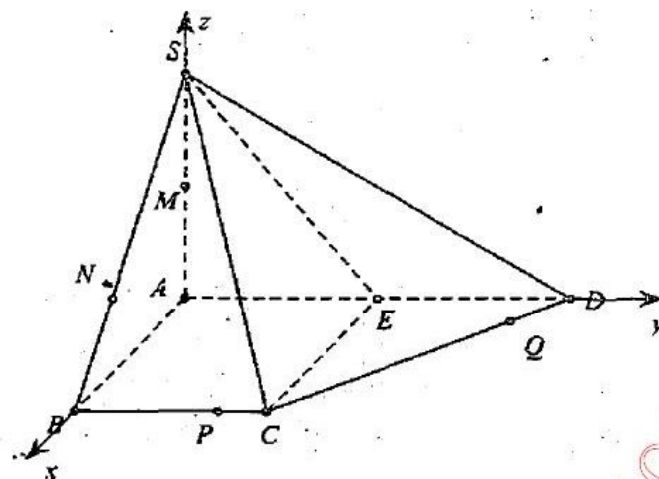
$$\text{Đặt } SA = x \Rightarrow S(0; 0; x)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-a; 2a; 0), \overrightarrow{SC} = (a; a; -x)$$

$$\Rightarrow DB = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{x^2 + 2a^2}; \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC} = a^2$$

$$\text{Nên } \cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{SC \cdot BD} = \frac{a}{\sqrt{5(x^2 + 2a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S(0; 0; 2a).$$



- 2) Ta có $\overrightarrow{CS} = (-a; -a; 2a)$, $\overrightarrow{CD} = (-a; a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

$$\text{Do đó: } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CS \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{3}.$$

Gọi $\beta = \angle(SCD, (SAB))$. Ta có hình chiếu của tam giác SCD lên mặt phẳng (SAB) là tam giác SAB nên ta suy ra

$$\cos \beta = \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot 2a}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- 3) Ta có $E(0; a; 0)$. Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SBCE

$$\text{Khi đó } \begin{cases} IB^2 = IS^2 \\ IC^2 = IS^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 3a \\ -x - y + 2z = a \\ -2y + 4z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right).$$

$$\text{Bán kính } R = IE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

4) Ta có $M(0; 0; a)$

$$\begin{aligned} \text{Do } \overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB} &\Rightarrow N\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{2a}{3}\right), \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(a; \frac{3a}{4}; 0\right), \overrightarrow{CQ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} \\ &\Rightarrow Q\left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; 0\right). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{2a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{MP} = \left(a; \frac{3a}{4}; -a\right), \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; -a\right)$$

$$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow (\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}) \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{3a^3}{20} \neq 0$$

nên M, N, P, Q không đồng phẳng.

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}) \cdot \overrightarrow{MQ}| = \frac{a^3}{40}.$$

Ví dụ 3.2.5. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm CC' , biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Oy , A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy .

- 1) Xác định tọa độ các đỉnh của lăng trụ.
- 2) Trên các cạnh $A'B'$, $A'C'$, BB' lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$, $A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện $AMPNQ$.

Lời giải.

Đặt $AA' = 2x$, $x > 0$.

- 1) Ta có $A(0; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $A'(0; 0; 2x)$, $C'(0; a; 2x)$.

Gọi K là hình chiếu của B lên Oy , ta có:

$$BK = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AK = \frac{a}{2}$$

$$\text{Nên } B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2x\right).$$

$$\text{Suy ra } M(0; a; x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0; a; x), \overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; -x\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'M} = \frac{a^2}{2} - x^2. \text{ Mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'M} = 0 \text{ nên suy ra } x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó $A'(0; 0; a\sqrt{2})$ và $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right)$.

$$2) \text{ Ta có } \overrightarrow{A'N} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; a\sqrt{2}\right),$$

$$\overrightarrow{A'P} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'C'} \Rightarrow P\left(0; \frac{2a}{3}; a\sqrt{2}\right),$$

$$\overrightarrow{B'Q} = \frac{3}{4} \overrightarrow{B'B} \Rightarrow Q\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \text{ và } M\left(0; a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; a\sqrt{2}\right), \overrightarrow{AM} = \left(0; a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(0; \frac{2a}{3}; a\sqrt{2}\right), \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$$

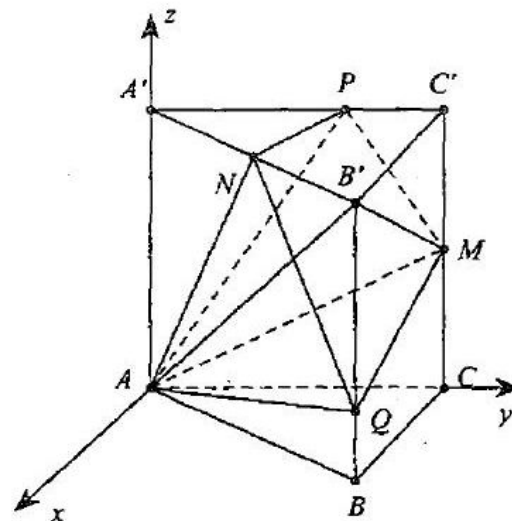
$$\Rightarrow [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{3}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}] \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{5\sqrt{6}+6}{24} a^3, [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}] \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{A.MPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}] \cdot \overrightarrow{AN}| = \frac{5\sqrt{6}+6}{144} a^3;$$

$$V_{A.MPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}] \cdot \overrightarrow{AM}| = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$$

$$\text{Vậy } V_{AMPNQ} = V_{A.MPQ} + V_{A.MPQ} = \frac{13\sqrt{6}+6}{114} a^3.$$



Ví dụ 3.2.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ với điểm $A(4; -1; 2)$, $B(-1; 0; -1)$ và $C(0; 0; -2)$, $D(10; -2; 4)$. Gọi M là trung điểm của CD . Biết SM vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = 66$ (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh S .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-5; 1; -3)$, $\overrightarrow{DC}(-10; 2; -6) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ nên $ABCD$ là hình thang và $S_{ADC} = 2S_{ABC}$, hay $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-5; 1; -3)$, $\overrightarrow{AC}(-4; 1; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -8; -1)$, do đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{66}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{66}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Chiều cao của khối chóp là $SM = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2\sqrt{66}$.

Vì $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \perp \overrightarrow{AB}$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \perp \overrightarrow{AC}$ nên giá của véc tơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, mà $SM \perp (ABCD)$ nên tồn tại số thực k sao cho: $\overrightarrow{SM} = k \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-k; -8k; -k)$.

$$\text{Suy ra } 2\sqrt{66} = \|\overrightarrow{SM}\| = \sqrt{(-k)^2 + (-8k)^2 + (-k)^2} \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

M là trung điểm CD nên $M(5; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{SM}(5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S)$.

- Nếu $k = 2$ thì $\overrightarrow{SM} = (5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S) = (-2; -16; -2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(7; 15; 3)$.

- Nếu $k = -2$ thì $\overrightarrow{SM} = (5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S) = (2; 16; 2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(3; -17; -1)$.

Vậy tọa độ các điểm S cần tìm là $S(7; 15; 3)$ hoặc $S(3; -17; -1)$.

2.3. Bài tập luyện tập

Bài 3.2.1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ với $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm của CC' .

- 1) Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.
- 2) Cho $a + b = 4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.

Bài 3.2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$ đường cao $SA = 2a$. Trên cạnh CD lấy điểm M sao cho $MD = x (0 \leq x \leq a)$.

- 1) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác SBM lớn nhất, nhỏ nhất.
- 2) Tìm vị trí của M để $mp(SBM)$ chia hình chóp thành hai phần sao

$$\text{cho } V_{C.SBM} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}.$$

Bài 3.2.3. Cho tam giác ABC có $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$.

- 1) Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .
- 2) Tìm tọa độ H là trực tâm của tam giác ABC .
- 3) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
- 4) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng các điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 3.2.4. Cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

- 1) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.
- 2) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Bài 3.2.5. Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc Oxy cho tứ diện $ABCD$ với $A(2; 3; 2)$, $B(6; -1; -2)$, $C(-1; -4; 3)$, $D(1; 6; -5)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Tìm tọa độ M trên CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Bài 3.2.6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $A \equiv O, B$ thuộc tia Ox , D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz . Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

- 1) Xác định tọa độ các đỉnh của hình chóp.
- 2) Chứng minh rằng $\triangle SCD$ vuông, tính diện tích tam giác SCD và tính $\cos$ của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- 3) Gọi E là trung điểm cạnh AD . Tìm tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.
- 4) Trên các cạnh SA, SB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $SM = MA$, $SN = 2NB$, $BP = 3PC$, $CQ = 4QD$. Chứng minh rằng M, N, P, Q không đồng phẳng và tính thể tích khối chóp $MNPQ$.

Hướng dẫn giải

Bài 3.2.1.

1) Ta có: $C(a; a; 0)$, $B'(a; 0; b)$, $C'(a; a; b)$, $D'(0; a; b) \Rightarrow M(a; a; \frac{b}{2})$.

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (a; 0; -b)$, $\overrightarrow{A'D} = (0; a; -b)$, $\overrightarrow{A'M} = (a; a; -\frac{b}{2})$

nên $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] = (ab; ab; a^2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'M} \cdot [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] = \frac{3a^2b}{2}. \text{ Vậy } V_{A'MBD} = \frac{a^2b}{4}.$$

2) Do $a, b > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4 = a + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + b \geq 3\sqrt{\frac{1}{4}a^2b} \Rightarrow a^2b \leq \frac{256}{27}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max V_{A'BDM} = \frac{64}{27}.$$

Bài 3.2.2

1) Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0; 0; 0); S(0; 0; 2a), B(a; 0; 0), D(0; 2a; 0) \Rightarrow C(a; 2a; 0).$$

$$\text{Do } MD = x \Rightarrow M(x; 2a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (a; 0; -2a), \overrightarrow{SM} = (x; 2a; -2a)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SBM} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}\| = a\sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}.$$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}$, $x \in [0; a]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}} \leq 0 \quad \forall x \in [0; a]$$

$$\Rightarrow a\sqrt{5} = f(a) \leq f(x) \leq f(0) = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{5} \leq S_{\Delta SBM} \leq a^2\sqrt{6}.$$

Vậy $\max S_{\Delta SBM} = a^2\sqrt{6}$ có được khi $M \equiv D$,

$\min S_{\Delta SBM} = a^2\sqrt{5}$ có được khi $M \equiv C$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có: } \overline{SC} &= (a; 2a; -2a) \Rightarrow [\overline{SB}, \overline{SM}] \overline{SC} \\ &= 4a^3 + 4a^2(a-x) - 4a^3 = 4a^2(a-x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{C.SBM} = \frac{1}{6} |[\overline{SB}, \overline{SM}] \overline{SC}| = \frac{2a^2(a-x)}{3}$$

$$\text{Mà } V_{S.ACBD} = \frac{1}{3} AS.AB.AD = \frac{4a^3}{3}$$

$$\Rightarrow V_{C.SMB} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} \Leftrightarrow \frac{2a^2(a-x)}{3} = \frac{4a^3}{9} \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$\text{Vậy } DM = \frac{a}{3}$$

Bài 3.2.3.

1) Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} K \in BC \\ AK \perp BC \end{cases}$$

• $K \in BC$ nên $\overline{BK} = t.\overline{BC}$, do đó

$$\begin{cases} x_K + 1 = t(1+1) \\ y_K - 2 = t(1-2) \\ z_K - 0 = t(-2-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 2t-1 \\ y_K = 2-t \\ z_K = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow K(2t-1; 2-t; -2t)$$

• $AK \perp BC \Leftrightarrow \overline{AK} \cdot \overline{BC} = 0$. Vì $\overline{AK}(2t-3; -1-t; -1-2t)$ nên
 $(2t-3).2 + (-1-t).(-1) + (-1-2t).(-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

$$\text{Tọa độ điểm K cần tìm là } K\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

2) Gọi H(x; y; z) là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$$\overline{AH}(x-2; y-3; z-1), \overline{BH}(x+1; y-2; z),$$

$$\overline{AB}(-3; -1; -1), \overline{AC}(-1; -2; -3), \overline{BC}(2; -1; -2)$$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overline{AB}, \overline{AC}$ là

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1; -8; 5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp CA \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right)$.

3) Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có

$$\overrightarrow{AI}(x-2; y-3; z-1), \overrightarrow{BI}(x+1; y-2; z), \overrightarrow{CI}(x-1; y-1; z+2).$$

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right)$.

4) Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2-1+1}{3}; \frac{3+2+1}{3}; \frac{1+0-2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15}; \frac{1}{15}; 0\right), \overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15}; \frac{1}{30}; 0\right)$ nên $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 3.2.4.

Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x; y; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3; 0; -3), \overrightarrow{AC}(x-5; y-3; 1), \overrightarrow{BC}(x-2; y-3; 4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB = AC = BC$, do đó

$$\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = 18 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 4 \\ x = 1; y = 2 \end{cases}$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1; 2; 0)$.

1) Gọi $D(x; y; z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5; y-3; z+1), \overrightarrow{BD}(x-2; y-3; z+4), \overrightarrow{CD}(x-1; y-2; z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ (x-5)^2 + (13-5x)^2 + (2-x)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2 - 16x + 20 = 0$ ta được $x = 2, x = \frac{10}{3}$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2; 6; -1)$ hoặc $D(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3})$.

2) Gọi $S(x; y; z)$.

Ta có $\overline{AS}(x-5; y-3; z+1), \overline{BS}(x-2; y-3; z+4), \overline{CS}(x-1; y-2; z)$

SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{AS} \cdot \overline{BS} = 0 \\ \overline{BS} \cdot \overline{CS} = 0 \\ \overline{CS} \cdot \overline{AS} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-2) + (y-3)^2 + (z+1)(z+4) = 0 \\ (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z+4)z = 0 \\ (x-1)(x-5) + (y-2)(y-3) + z(z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 6y + 5z = -23 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y + 4z = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4z = 12 \\ -3x - 3z = -3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 11 \\ x = 1 - z \\ 3z^2 + 10z + 8 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2 + 10z + 8 = 0$ ta được $z = -2; z = -\frac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3; 1; -2), S(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{4}{3})$.

Bài 3.2.5.

Ta có $\overline{AB} = (4; -4; -4); \overline{CD} = (2; 10; -8)$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow (AB, CD) = 90^\circ.$$

Do AB không đổi $\Rightarrow \Delta AMB$ có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM + BM$ nhỏ nhất.

$$\text{Gọi } M(x; y; z) \in CD \Rightarrow \overline{CM} = k \cdot \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -4 + 10k \\ z = 3 - 8k \end{cases}$$

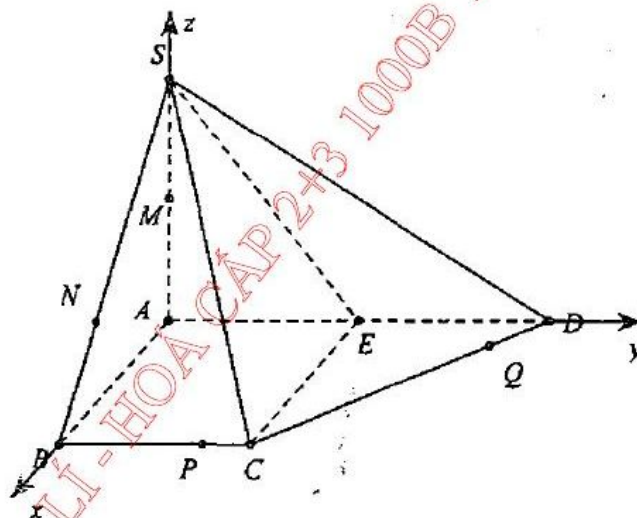
$$\Rightarrow M(-1+2k; -4+10k; 3-8k)$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = (2k - 3; 10k - 7; 1 - 8k), \overline{BM} = (2k - 7; 10k - 3; 5 - 8k).$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } AM + BM &= \sqrt{168k^2 - 168k + 59} + \sqrt{168k^2 - 168k + 83} \\ &= \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 17} + \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 41} \geq \sqrt{17} + \sqrt{41} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M(0; 1; -1)$.

Bài 3.2.6.



- 1) Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$.

Đặt $SA = x \Rightarrow S(0; 0; x)$

$$\overrightarrow{BD} = (-a; 2a; 0), \overrightarrow{SC} = (a; a; -x)$$

$$\Rightarrow \mathbf{DB} = a\sqrt{5}, \mathbf{SC} = \sqrt{x^2 + 2a^2}; \mathbf{\overline{BD} \cdot \overline{SC} = a^2}$$

$$\text{Nên } \cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD}} = \frac{a}{\sqrt{5(x^2 + 2a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S(0; 0; 2a).$$

- 2) Ta có $\overrightarrow{CS} = (-a; -a; 2a)$, $\overrightarrow{CD} = (-a; a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

$$\text{Do đó: } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} CS \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{3}.$$

Gọi $\beta = \angle(\overrightarrow{SCD}, \overrightarrow{SAB})$. Ta có hình chiếu của tam giác SCD lên mặt phẳng (SAB) là tam giác SAB nên ta suy ra

$$\cos \beta = \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot 2a}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- 3) Ta có $E(0; a; 0)$. Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SBCE

$$\text{Khi đó } \begin{cases} IB^2 = IS^2 \\ IC^2 = IS^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 3a \\ -x - y + 2z = a \\ -2y + 4z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right).$$

$$\text{Bán kính } R = IE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

- 4) Ta có $M(0; 0; a)$

$$\text{Do } \overrightarrow{SN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{SB} \Rightarrow N\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{2a}{3}\right), \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(a; \frac{3a}{4}; 0\right),$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{5} \overrightarrow{CD} \Rightarrow Q\left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; 0\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{2a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{MP} = \left(a; \frac{3a}{4}; -a\right), \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; -a\right)$$

$$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow (\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}) \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{3a^3}{20} \neq 0$$

nên M, N, P, Q không đồng phẳng.

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}) \cdot \overrightarrow{MQ}| = \frac{a^3}{40}.$$

Chuyên đề 3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

3.1. Phương pháp giải.

1) Để lập phương trình của một (P) ta có các cách sau

Cách 1: Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ mà (P) đi qua và một VTPT

$\vec{n} = (a; b; c)$ của (P) . Khi đó phương trình của (P) có dạng:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Khi tìm VTPT của (P) chúng ta cần lưu ý một số tính chất sau:

- Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trên (P) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một VTPT của (P) .

- Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì VTPT của mặt phẳng này cũng là VTPT của mặt phẳng kia.

- Nếu (P) chứa (hoặc song song) với AB thì giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ nằm trên (hoặc song song) với (P) .

- Nếu $(P) \perp (Q)$ thì VTPT của mặt phẳng này sẽ có giá nằm trên hoặc song song với mặt phẳng kia.

- Nếu $(P) \perp AB$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTPT của (P) .

- Thông thường để lập phương trình mặt phẳng ta thường đi tìm cặp véc tơ có giá song song hoặc nằm trên (P) , từ đó tìm được VTPT của (P) .

Cách 2: Giải sử phương trình của (P) có dạng:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

Dựa vào giả thiết của đề bài, ta tìm được: $a = mb, c = nb, d = pb$. Khi đó phương trình của (P) là: $mx + y + nz + p = 0$.

Cách 3: Giả sử $M(x; y; z)$ là một điểm bất kì thuộc (P) . Dựa vào tính chất của mặt phẳng (P) , ta thiết lập được: $ax + by + cz + d = 0$. Khi đó, phương trình của (P) là: $ax + by + cz + d = 0$.

2) Các trường hợp đặc biệt

- Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm không trùng với gốc tọa độ

$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

- Các mặt phẳng toạ độ $(Oyz): x = 0$, $(Ozx): y = 0$, $(Oxy): z = 0$.
- Mặt phẳng (α) qua gốc toạ độ $Ax + By + Cz = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Ox có dạng $By + Cz + D = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oy có dạng $Ax + Cz + D = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oz có dạng $Ax + By + D = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $Cz + D = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $Ax + D = 0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Ozx) có phương trình là $By + D = 0$.

3.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.3.1. Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:

- 1) (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, $B(4; -2; -1)$, $C(3; -1; 2)$.
- 2) (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC (với A, C ở câu 1).
- 3) (P) đi qua $M(0; 0; 1)$, $N(0; 2; 0)$ và song song với AB .
- 4) (P) đi qua các hình chiếu của A lên các mặt phẳng toạ độ.

Lời giải.

- 1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -3; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; -5; -1)$.

Vì (P) đi qua A, B, C nên (P) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; -5; -1)$ làm VTPT

Vậy phương trình (P) là: $-8(x - 1) - 5(y - 2) - (z - 3) = 0$

Hay: $8x + 5y + z - 21 = 0$.

- 2) Gọi M là trung điểm AC , ta có: $M\left(2; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Vì (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC nên (P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AC} = (2; -3; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $2\left(x - 2\right) - 3\left(y - \frac{1}{2}\right) - 1\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0$

Hay: $2x - 3y - z = 0$.

3) Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 2; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}] = (-12; -3; -6)$.

Vì (P) đi qua M, N và song song với AB nên (P) nhận

$$\vec{n} = -\frac{1}{3}[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}] = (4; 1; 2) \text{ làm VTPT.}$$

Vậy phương trình (P) là: $4x + y + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2z - 2 = 0$.

4) Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz.

Ta có $A_1(1; 0; 0)$, $A_2(0; 2; 0)$, $A_3(0; 0; 3)$ nên phương trình (P) là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Ví dụ 3.3.2. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1) (α) đi qua M(2; 3; 1) và song song với mặt phẳng (P):

$$x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

2) (α) đi qua A(2; 1; 1), B(-1; -2; -3) và (α) vuông góc với

$$(\beta): x + y + z = 0.$$

3) (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q): $2x + 3y - z + 2 = 0$.

Lời giải.

1) Ta có $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là VTPT của (P).

Vì (α) // (P) nên $\vec{n} = (1; -2; 3)$ cũng là VTPT của (α).

Vậy phương trình (α) là: $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

2) Ta có $\vec{a} = (1; 1; 1)$ là VTPT của (β), $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; -4)$.

Suy ra $[\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (-1; 1; 0)$.

Vì (α) đi qua A, B và (α) $\perp$ (β) nên (α) nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (-1; 1; 0)$

làm VTPT.

Vậy phương trình (α) là: $x - y - 1 = 0$.

Chú ý: Ta có thể lập phương trình (α) theo cách khác như sau:

Giả sử phương trình (α): $ax + by + cz + d = 0$.

Do A, B $\in$ (α) và (α) $\perp$ (β) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b + c + d = 0 \\ -a - 2b - 3c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ c = 0 \\ b = -a \end{cases}, \text{ chọn } a = 1 \Rightarrow b = d = -1.$$

Vậy phương trình (α): $x - y - 1 = 0$.

3) Vì (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q) nên (α) nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{i}]$ làm VTPT.

Trong đó $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{a} = (2; 3; -1)$ là VTPT của (Q) nên $\vec{n} = (0; 1; 3)$.

Vậy phương trình (α) là: $y + 3z = 0$.

Ví dụ 3.3.3. Lập phương trình mặt phẳng (α) , biết:

- 1) (α) đi qua $A(-1; 1; 1)$, $B(3; 0; 2)$ và khoảng cách từ $C(1; 0; -2)$ đến (α) bằng 2.
- 2) (α) cách đều hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 4 = 0$.
- 3) (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) , đồng thời (α) vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 3x + 2y - z + 5 = 0$.

Lời giải.

- 1) Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x + 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0 \quad (1)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $4a - b + c = 0 \Rightarrow b = 4a + c$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } d(C, (\alpha)) = 2 &\Leftrightarrow \frac{|2a - b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|2a + 4c|}{\sqrt{a^2 + (4a + c)^2 + c^2}} = 2 \\ &\Leftrightarrow (a + 2c)^2 = 17a^2 + 8ac + 2c^2 \\ &\Leftrightarrow 8a^2 + 2ac - c^2 = 0 \Leftrightarrow c = -2a, c = 4a. \end{aligned}$$

- $c = -2a$ ta chọn $a = 1 \Rightarrow c = -2, b = 2$ nên phương trình

$$(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

- $c = 4a$ ta chọn $a = 1 \Rightarrow c = 4, b = 8$ nên phương trình

$$(\alpha): x + 8y + 4z - 11 = 0.$$

Chú ý: Khi gặp các bài toán về khoảng cách và góc ta thường dùng cách 2 để lập phương trình mặt phẳng.

- 2) Ta có $M(x; y; z)$ là một điểm bất kì thuộc (α) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} d(M, (P)) = d(M, (Q)) &\Leftrightarrow \frac{|2x + y + 2z - 1|}{3} = \frac{|x - 2y + 2z - 4|}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = x - 2y + 2z - 4 \\ 2x + y + 2z - 1 = -x + 2y - 2z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ 3x - y + 4z - 5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán:

$$(\alpha_1): x + 3y + 3 = 0 \text{ và } (\alpha_2): 3x - y + 4z - 5 = 0.$$

Chú ý: Mặt phẳng (α) ở trong bài toán là mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) . Ở trên chúng ta sử dụng cách 3 để lập phương trình mặt phẳng (α) .

- 3) Gọi E, F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và

(Q) . Khi đó tọa độ của E, F là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Cho $x = 0$, từ $(*)$ ta có $y = -1, z = 1 \Rightarrow E(0; -1; 1)$.

Cho $x = 6$, từ $(*)$ ta có $y = -3, z = -4 \Rightarrow F(6; -3; -4)$.

Suy ra $\overrightarrow{EF} = (6; -2; -5)$.

Vì (α) đi qua E, F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{EF}, \vec{a}]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{a} = (3; 2; -1)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n} = (12; -9; 18)$

Vậy phương trình của (α) : $4x - 3y + 6z - 9 = 0$.

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trên theo hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$, ta có $E(0; -1; 1) \in \Delta$ và

$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (6; -2; -5)$ là VTCP của Δ .

Suy ra $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}, \vec{n}_\beta] = (12; -9; 18)$.

Vậy phương trình của (α) : $4x - 3y + 6z - 9 = 0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua giao tuyến của (P) và (Q) nên phương trình của

(α) có dạng: $m(2x + y + 2z - 1) + n(x - 2y + 2z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2m + n)x + (m - 2n)y + (2m + 2n)z - m - 4n = 0$.

Do $(\alpha) \perp (\beta)$ nên $3(2m + n) + 2(m - 2n) - (2m + 2n) = 0$

$\Leftrightarrow 6m - 3n = 0 \Leftrightarrow n = 2m$.

Ta chọn $m = 1 \Rightarrow n = 2$.

Vậy phương trình của (α) : $4x - 3y + 6z - 9 = 0$.

Cách làm này là dựa vào phương trình chùm mặt phẳng. Cụ thể:

Cho hai mặt phẳng cắt nhau $(P): ax + by + cz + d = 0$ và

$(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Khi đó mọi mặt phẳng đi qua giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình:

$m(ax + by + cz + d) + n(a'x + b'y + c'z + d') = 0$.

Ví dụ 3.3.4. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 3; -1)$, $C(0; 1; 1)$, $D(-4; -3; 5)$. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết:

- 1) (α) đi qua A và chứa Ox.
- 2) (α) đi qua A, B và cách đều hai điểm C, D.

Lời giải.

- 1) Vì mặt phẳng (α) chứa Ox nên phương trình (α) có dạng: $ay + bz = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Do $A \in (\alpha)$ nên: $2a + 3b = 0$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3$.

Vậy phương trình của (α) : $3y - 2z = 0$.

- 2) Cách 1: Vì (α) cách đều C, D nên ta có hai trường hợp:

TH1: $CD \parallel (\alpha)$, khi đó $[\overline{AB}, \overline{CD}] = \vec{n}$ là VTPT của (α) .

Mà $\overline{AB} = (-3; 1; -4)$, $\overline{CD} = (-4; -4; 4) \Rightarrow \vec{n} = (-12; 28; 16)$.

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $3x - 7y - 4z + 23 = 0$.

TH2: $CD \cap (\alpha) = \{I\}$, khi đó ta có được I là trung điểm của CD, suy ra $I(-2; -1; 3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua A, B, I.

Ta có $\overline{AI} = (-3; -3; 0)$, $\overline{BI} = (0; -4; 4) \Rightarrow [\overline{AI}, \overline{BI}] = (-12; 12; 12)$.

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $x - y - z + 4 = 0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b - 3c = 0 \quad (*)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên $-3a + b - 4c = 0 \Rightarrow b = 3a + 4c$ (1)

Mặt khác: $d(C, (\alpha)) = d(D, (\alpha))$ nên ta có:

$$\frac{|-a - b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-5a - 5b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 5a + 5b - 2c \\ a + b + 2c = -5a - 5b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

• $4a + 3c = 0$ ta chọn $c = -4 \Rightarrow a = 3, b = -7$, suy ra phương trình (α) là: $3x - 7y - 4z + 23 = 0$.

• $a + c = 0$ ta chọn $c = -1 \Rightarrow a = 1, b = -1$, suy ra phương trình của (α) là: $x - y - z + 4 = 0$.

Ví dụ 3.3.5. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết:

- 1) (α) đi qua $A(-2; -1; 2)$, $B(-4; 1; 1)$ và cách O một khoảng bằng 3.
- 2) (α) đi qua $C(1; 1; 0)$, $D(3; -2; -1)$ và tạo với mặt phẳng

$$(\beta): 2x + y - 2z - 1 = 0 \text{ một góc } \varphi \text{ thoả mãn } \tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Lời giải.

Giả sử phương trình (α) có dạng:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

- 1) Vì (α) đi qua A, B nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -2a - b + 2c + d = 0 \\ -4a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b - 2a \\ d = 6a - 3b \end{cases}$$

Mặt khác $d(O, (\alpha)) = 3$ nên

$$\begin{aligned} \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} &= 3 \Leftrightarrow d^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\Leftrightarrow (6a - 3b)^2 = 9(a^2 + b^2 + (2b - 2a)^2) \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = 5a^2 - 8ab + 5b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b. \end{aligned}$$

Ta chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2, c = -2, d = 9$.

Vậy phương trình $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$.

- 2) Vì (α) đi qua C, D nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 3a - 2b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a - 3b \\ d = -a - b \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{|2a + b - 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} &= \frac{5}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(2a + b - 2c)^2 = 25(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\Leftrightarrow 3(2a - 7b)^2 = 25(a^2 + b^2 + (2a - 3b)^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 113a^2 - 216ab + 103b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b, a = \frac{103}{113}b.$$

• $a = b$, ta chọn $b = 1 \Rightarrow a = 1, c = -1, d = -2$

Phương trình $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$.

$$\bullet a = \frac{103}{113}b, \text{ ta chọn } b = 113 \Rightarrow a = 103, c = -133, d = -216$$

$$\text{Phương trình } (\alpha): 103x + 113y - 133z - 216 = 0.$$

Ví dụ 3.3.6. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng

(P): $x + 2y + 2z - 3 = 0$, mặt phẳng (Q): $2x - y + 2z - 9 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời cách E(8; -2; -9) một khoảng lớn nhất.

Lời giải.

Ta có A(3; -1; 1) và B(-9; 1; -4) là hai điểm thuộc giao của (P) và (Q). Do đó (β) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) khi và chỉ khi A, B $\in$ (β).

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (-6; 2; -5) \text{ nên phương trình AB: } \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Gọi K là hình chiếu của E lên AB, suy ra

$$K(3 + 6t; -1 + 2t; 1 - 5t) \Rightarrow \overline{EK} = (-5 + 6t; 1 + 2t; 10 - 5t)$$

Vì $\overline{EK} \perp \overline{AB}$

$$\Rightarrow \overline{EK} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(-5 + 6t) + 2(1 + 2t) - 5(10 - 5t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{5}$$

$$\text{Suy ra } K\left(\frac{51}{5}; \frac{7}{5}; -5\right), \overline{EK} = \left(\frac{11}{5}; \frac{17}{5}; 4\right).$$

Gọi H là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β), khi đó:

$$d(E, (\beta)) = EH \leq EK$$

Suy ra $d(E, (\beta))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$ hay (β) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với EK

$$\text{Phương trình } (\beta): 11x + 17y + 20z - 36 = 0.$$

Ví dụ 3.3.7. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:

- (α) đi qua A(1; -1; 1), B(2; 0; 3) và (α) song song với Ox.
- (α) đi qua M(3; 0; 1), N(6; -2; 1) và (α) tạo với (Oyz) một góc φ thỏa $\cos \varphi = \frac{2}{7}$.

Lời giải.

- Vì (α) song song với Ox nên phương trình của (α) có dạng:
 $ay + bz + c = 0$

$$\text{Do } A, B \in (\alpha) \text{ nên ta có: } \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3b \\ a = -2b \end{cases}$$

chọn $b = -1 \Rightarrow a = 2, c = 3$

Vậy phương trình của (α) : $2y - z + 3 = 0$.

Chú ý: Ta có thể tìm VTPT của (α) như sau: $\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{i}]$.

2) Vì $M \in (\alpha)$ nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-3) + by + c(z-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 3a - c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Do } N \in (\alpha) \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}a.$$

Mặt khác $\cos \varphi = \frac{2}{7}$ và $\vec{i} = (1; 0; 0)$ là VTPT của (Oyz) nên ta có:

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 49a^2 = 4 \left[a^2 + \frac{9}{4}a^2 + c^2 \right] = 13a^2 + 4c^2$$

$$\Leftrightarrow c = \pm 3a.$$

Ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3, c = \pm 6$.

Từ đó ta có phương trình của (α) là:

$$2x + 3y + 6z - 12 = 0 \text{ hoặc } 2x + 3y - 6z = 0.$$

Ví dụ 3.3.8. Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(-2; 0; -1)$, $C(0; 1; 0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp và trục tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có: $\vec{AB} = (-3; -2; -2)$, $\vec{AC} = (-1; -1; -1) \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (0; -1; 1)$ là VTPT của mặt (ABC)

Phương trình (ABC) : $y - z - 1 = 0$.

1) Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ (x+2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y + 4z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = -4 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{2} \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Vậy $I\left(-\frac{9}{2}; 4; 3\right)$.

2) Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm tam giác ABC . Ta có:

$$\begin{cases} \overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \\ \overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2+y+z+1=0 \\ 3x+2(y-1)+2z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ 3x+2y+2z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-5 \\ z=-6 \end{cases}$$

Vậy $H(8; -5; -6)$.

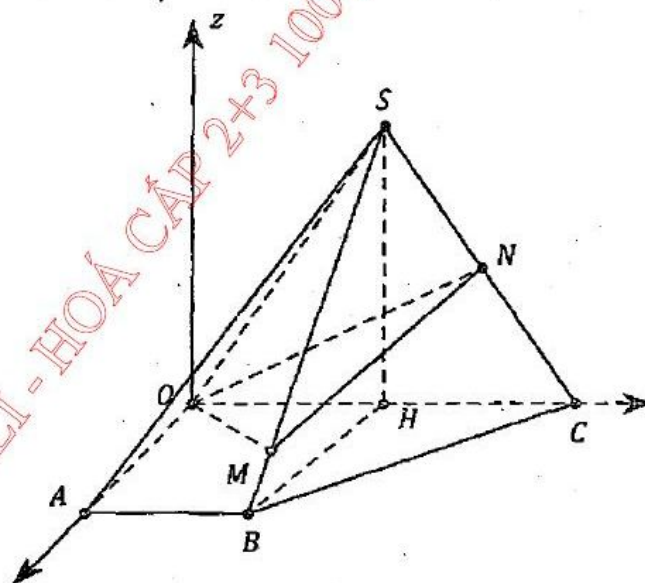
Ví dụ 3.3.9. Trong không gian Oxyz cho hình chóp $S.OABC$ có đáy $OABC$

là hình thang vuông tại O và $A(3; 0; 0)$, $AB = OA = \frac{1}{2}OC$, $S(0; 3; 4)$ và

$y_C > 0$.

- 1) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích của hình chóp $S.OABC$.
- 2) Một mặt phẳng (α) đi qua O và vuông góc với SA cắt SB, SC tại M và N . Tính thể tích khối chóp $SOMN$.

Lời giải.



1) Do $ABCD$ là thang vuông tại A và O , đồng thời $A \in Ox, y_C > 0, OC = 6$

Nên ta suy ra được $C(0; 6; 0)$. Tương tự ta có: $B(3; 3; 0)$.

Vì $S(0; 3; 4)$, nên ta gọi $H(0; 3; 0)$ là trung điểm OC thì ta có $SH \perp (OABC)$.

Ta có: $S_{OABC} = \frac{OA(AB + OC)}{2} = \frac{27}{2}$, $SH = 4$ nên thể tích khối chóp

$S.OABC$ là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{OABC} = \frac{1}{3}.4.\frac{27}{2} = 18$ (đvtt).

2) Ta có: $\overrightarrow{SA} = (3; -3; -4)$, suy ra phương trình mặt phẳng (α)
 $3x - 3y - 4z = 0$.

Vì $\overrightarrow{SB} = (3; 0; -4)$, $\overrightarrow{SC} = (0; 3; -4)$ nên ta có phương trình

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SM} = t.\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SN} = t'.\overrightarrow{SC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3t; 3; 4 - 4t) \\ N(0; 3 + 3t'; 4 - 4t') \end{cases}$

Mà $M, N \in (\alpha)$ nên ta có: $t = 1, t' = \frac{25}{7}$.

Suy ra: $M(3; 3; 0)$ và $N(0; \frac{96}{7}; -\frac{72}{7})$.

Suy ra $\overrightarrow{OS} = (0; 3; 4)$, $\overrightarrow{OM} = (3; 3; 0)$, $\overrightarrow{ON} = (0; \frac{96}{7}; -\frac{72}{7})$

$\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM} = (-12; 12; -9)$, $(\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{1800}{7}$.

Vậy $V_{SOMN} = \frac{300}{7}$ (đvtt).

Ví dụ 3.3.10. Cho $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm

$A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), C(-2; 0; 1)$.

1) Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho $MA = MB$ và $y_M = 1$.

2) Tìm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Gọi $M(x; 1; z) \in (P)$, ta có: $x - 1 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -z$.

Suy ra $MA = MB \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + (z - 2)^2$

$$\Leftrightarrow -2x - 2z + 2 = -4z + 4$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } M(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}).$$

Chú ý: Điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (P): ax + by + cz + d = 0$ khi và chỉ khi
 $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

2) Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*)

Ta có: $2\overrightarrow{IA} = (2 - 2x; 2 - 2y; 2 - 2z)$,

$\overrightarrow{IB} = (-x; 1 - y; 2 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (-2 - x; -y; 1 - z)$

$$\text{Nên (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \\ 3 - 4y = 0 \\ 5 - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{4}. \text{ Suy ra } I \left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right).$$

$$\text{Khi đó: } \overline{NA}^2 = 2(\overline{NI} + \overline{IA})^2 = 2NI^2 + 2IA^2 + 4\overline{NI} \cdot \overline{IA}$$

$$\overline{NB}^2 = NI^2 + IB^2 + 2\overline{NI} \cdot \overline{IB}; \overline{NC}^2 = NI^2 + IC^2 + 2\overline{NI} \cdot \overline{IC}$$

$$\text{Do đó } S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overline{NI}(2\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC})$$

$$= 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2.$$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

$$\text{Gọi } N(x; y; z) \Rightarrow \overline{IN} = \left(x; y - \frac{3}{4}; z - \frac{5}{4} \right), \vec{n} = (1; -1; 1) \text{ là VTPT của } (P)$$

$$\text{Vì } N \in (P) \Rightarrow x - y + z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Do } IN \perp (P) \text{ nên } \overline{IN} = k \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{3}{4} - k \\ z = \frac{5}{4} + k \end{cases} \text{ thay vào (1), ta có được:}$$

$$k - \left(\frac{3}{4} - k \right) + \left(\frac{5}{4} + k \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{4}, z = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } N \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4} \right)$$

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

$$\text{Gọi } N(a; b; c) \in (P), \text{ suy ra } a - b + c = -1.$$

$$NA^2 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2,$$

$$NB^2 = a^2 + (b - 1)^2 + (c - 2)^2,$$

$$NC^2 = (a + 2)^2 + b^2 + (c - 1)^2.$$

$$\text{Suy ra } S = 4(a^2 + b^2 + c^2) - 6b - 10c + 13.$$

$$\text{Ta có: } 4a^2 + x^2 \geq 4xa; 4b^2 + y^2 \geq 4yb; 4c^2 + z^2 \geq 4cz$$

$$\text{Do đó: } S \geq 4xa + (4y - 6)b + (4z - 10)c + 13 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Ta chọn x, y, z sao cho:
$$\begin{cases} \frac{2x}{1} = \frac{2y-3}{-1} = \frac{2z-5}{1} = t \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được đáp số bài toán.

Ví dụ 3.3.11. Tìm m, n để 3 mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:

$$(P): x + my + nz - 2 = 0, (Q): x + y - 3z + 1 = 0 \text{ và}$$

$$(R): 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Khi đó hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng chung

đó và tạo với (P) một góc φ sao cho $\cos \varphi = \frac{23}{\sqrt{679}}$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

* Cho $z = 1 \Rightarrow x = 6, y = -4 \Rightarrow A(6; -4; 1) \in (Q) \cap (R)$.

* Cho $z = 0 \Rightarrow x = -4, y = 3 \Rightarrow B(-4; 3; 0) \in (Q) \cap (R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A, B \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m + n = -4 \\ 3m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 4 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ta có: $\vec{n} = (1; 2; 4)$ là VTPT của (P) .

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x - 6) + b(y + 4) + c(z - 1) = 0.$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $c = -10a + 7b$.

Suy ra $\vec{v} = (a; b; -10a + 7b)$ là VTPT của (α) .

Nên theo giả thiết ta có: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-39a + 30b|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (7b - 10a)^2}}$

$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \frac{23}{\sqrt{679}} \Leftrightarrow \frac{|-39a + 30b|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (7b - 10a)^2}} = \frac{23}{\sqrt{679}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{97} |39a - 30b| = 23 \sqrt{3(101a^2 + 50b^2 - 140ab)}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 97 (13a - 10b)^2 = 23^2 (101a^2 - 140ab + 50b^2)$$

$$\Leftrightarrow 85a^2 + 32ab - 53b^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b, a = \frac{53}{85}b.$$

- $a = -b$ ta chọn $b = -1 \Rightarrow a = 1, c = -17$.

Phương trình $(\alpha): x - y - 17z + 7 = 0$.

- $a = \frac{53}{85}b$ ta chọn $b = 85 \Rightarrow a = 53, c = 65$.

Phương trình $(\alpha): 53x + 85y + 65z - 43 = 0$.

Chú ý: Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta có thể sử dụng phương pháp phương trình chùm mặt phẳng.

Ví dụ 3.3.12. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(2; 0; 0), M(0; -3; 6)$.

- 1) Chứng minh rằng mặt phẳng $(P): x + 2y - 9 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính MO. Tìm tọa độ tiếp điểm?
- 2) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, M và cắt các trục Oy, Oz tại các điểm tương ứng B, C sao cho $V_{OABC} = 3$.

Lời giải.

- 1) Ta có $OM = 3\sqrt{5}$.

Do $d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{5} = OM$, suy ra (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính OM.

Gọi $H(a; b; c)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow H \in (P) \Rightarrow a + 2b - 9 = 0$ (1)

Mặt

khác

$$MH \perp (P) \Rightarrow \overline{MH} \parallel \overline{n_P} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b+3}{2} = t \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t; b = 2t - 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được: $t + 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Vậy $H(3; 3; 0)$.

- 2) Giả sử $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$.

Vì mp(Q) đi qua A, B, C nên phương trình của (Q): $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Vì } M \in (Q) \Rightarrow \frac{-3}{b} + \frac{6}{c} = 1 \Rightarrow c = \frac{6b}{b+3} \quad (2)$$

$$\text{Khử đó: } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot |bc| = 3 \Rightarrow |bc| = 9 \quad (3)$$

$$\text{Thay (2) vào (3) ta có: } 2b^2 = 3|b+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 3b - 9 = 0 \\ 2b^2 + 3b + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$e \quad b = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow (Q) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

$$e \quad b = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -6 \Rightarrow (Q) : 3x - 4y - z - 6 = 0.$$

Ví dụ 3.3.13. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(4m - 3; 2m + 3; 8m + 7)$, $B(6m - 4; 3m + 4; 12m + 10)$, trong đó m là tham số. Chứng minh rằng khi m thay đổi thì hai điểm A, B luôn nằm trên một mặt phẳng cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Lời giải.

Xét mặt phẳng $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$.

Giả sử khi m thay đổi thì A, B luôn nằm trên (α) . Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} a(4m - 3) + b(2m + 3) + c(8m + 7) + d = 0 \\ a(6m - 4) + b(3m + 4) + c(12m + 10) + d = 0 \end{cases} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(4a + 2b + 8c) - 3a + 3b + 7c + d = 0 \\ m(6a + 3b + 12c) - 4a + 4b + 10c + d = 0 \end{cases} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 4c = 0 \\ -3a + 3b + 7c + d = 0 \\ 2a + b + 4c = 0 \\ -4a + 4b + 10c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10a \\ c = -3a \\ d = -6a \end{cases}$$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = 10, c = -3, d = -6$.

Vậy khi m thay đổi thì hai điểm A, B luôn nằm trên mặt phẳng

$$(\alpha) : x + 10y - 3z - 6 = 0.$$

Ví dụ 3.3.14. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 9; 4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

- 1) M là trọng tâm của tam giác ABC .
- 2) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất.
- 3) $OA = OB = OC$.
- 4) $8OA = 12OB + 16 = 37OC$ và $x_A > 0, z_C < 0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là

$$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) \text{ với } a, b, c \neq 0.$$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 9; 4)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

1) Ta có: $\overline{AM}(1-a; 9; 4)$, $\overline{BC}(0; -b; c)$, $\overline{BM}(1; 9-b; 4)$, $\overline{CA}(a; 0; -c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in (\alpha) \\ \overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BM} \cdot \overline{CA} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \\ 9b = 4c \\ a = 4c \end{cases} \Rightarrow a = 98; b = \frac{98}{9}; c = \frac{49}{2}.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x + 9y + 4z - 98 = 0$.

2) Để giải bài toán này ta có hai cách sau:

Cách 1: Ta có: $d(O, (\alpha)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ với các

số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(1 \cdot \frac{1}{a} + 9 \cdot \frac{1}{b} + 4 \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq (1^2 + 9^2 + 4^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T \geq \frac{1}{98}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 1 : \frac{1}{a} = 9 : \frac{1}{b} = 4 : \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 9b = 4c = 98.$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x + 9y + 4z - 98 = 0$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α) .

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên

$$d(O, (\alpha)) = OH \leq OM = \sqrt{98}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1;9;4)$ nên phương trình (α) là

$$1.(x-1) + 9.(y-9) + 4.(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + 9y + 4z - 98 = 0.$$

3) Vì $OA = OB = OC$ nên $|a| = |b| = |c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $a = b = c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 14$, nên phương trình (α) là

$$x + y + z - 14 = 0.$$

• Trường hợp 2: $a = b = -c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 6$, nên phương trình (α) là $x + y - z - 6 = 0$.

• Trường hợp 3: $a = -b = c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -4$, nên phương trình (α) là $x - y + z + 4 = 0$.

• Trường hợp 4: $a = -b = -c$. Từ (1) có $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -12$, nên phương trình (α) là $x - y - z + 12 = 0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x + y + z - 14 = 0$, và các mặt phẳng $x + y - z - 6 = 0$, $x - y + z + 4 = 0$, $x - y - z + 12 = 0$.

4) Vì $x_A > 0, z_C < 0$ nên $a > 0, c < 0$, do đó

$$8OA = 12OB + 16 = 37OC \Leftrightarrow 8a = 12|b| + 16 = -37c.$$

• Nếu $b > 0 \Rightarrow c = -\frac{8}{37}a, b = \frac{2a-4}{3}, a > 2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{27}{2a-4} - \frac{37}{2a} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -7 \end{cases}.$$

Vì $a > 2$ nên $a = 5 \Rightarrow b = 2; c = -\frac{40}{37}$, phương trình mặt phẳng cần tìm là $(\alpha): 8x + 20y - 37z - 40 = 0$.

• Nếu $b < 0 \Rightarrow c = -\frac{8}{37}a, b = \frac{4-2a}{3}, a > 2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{27}{4-2a} - \frac{37}{2a} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 29a - 35 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-29 \pm 3\sqrt{109}}{2}.$$

Vì $a > 2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x + 20y - 37z - 40 = 0$.

Ví dụ 3.3.15. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; -2)$, $C(2; -1; 0)$, $D(-2; 2; 3)$.

- 1) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện và tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- 2) Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD và cắt hai đường thẳng AC, BD lần lượt tại hai điểm M, N thỏa $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1$.
- 3) Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, (P) là mặt phẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D' . Viết phương trình mặt phẳng (P) biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

- 1) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 1; 2)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-5; -5; 5) \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 20 \neq 0$$

Nên A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD \text{ là: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{10}{3}.$$

- 2) Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1; 2; 5)$ nên $BD = \sqrt{30}$, $AC = \sqrt{6}$.

$$\overrightarrow{CD} = (-4; 3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (6; 18; -10).$$

Vì (α) song song với AB, CD nên $\vec{n}_\alpha = (3; 9; -5)$.

Vì MN, AB, CD lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song gồm: Mặt phẳng đi qua AB và song song với CD , mặt phẳng đi qua CD và song song với AB và mặt phẳng (α) nên theo định lý Talet đảo trong không gian ta

$$\text{suy ra: } \frac{BN}{BD} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{BN}{\sqrt{30}} = \frac{AM}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow BN = \sqrt{5}AM \Leftrightarrow BN^2 = 5AM^2.$$

$$\text{Mặt khác: } \left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1 \Leftrightarrow AM^4 - AM^2 = BN^2 = 5AM^2 \Rightarrow AM^2 = 6$$

$$\text{Ta có phương trình } AC: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow M(1 + t; 1 - 2t; 1 - t)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} = (t; -2t; -t) \Rightarrow AM^2 = 6 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

• $t = 1$, ta có $M(2; -1; 0) \equiv C$ nên ta loại trường hợp này.

• $t = -1$, ta có $M(0; 3; 2)$ nên phương trình

$$(\alpha): 3x + 9y - 5z - 17 = 0.$$

3) Ta có $G\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD , suy ra $A_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'}\overrightarrow{AD'}\right).$$

Vì B', C', D', G đồng phẳng nên ta có:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}\right) = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt{\frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AD}{AD'}} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AD}{AD'} \geq \frac{27}{64}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64}$$

$$\Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64} V_{ABCD} = \frac{45}{32}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{3}{4}$.

Do đó: $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (\alpha)$ song song với mặt phẳng (BCD) .

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 2; 5) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-9; -17; 5)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $9x + 17y - 5z - 6 = 0$.

3.3. Bài tập luyện tập

Bài 3.3.1. Lập phương trình của (P) trong các trường hợp sau:

- 1) (P) đi qua $A(1; 2; 1)$ và song song với $(Q): x + y + 3z - 1 = 0$.
- 2) (P) đi qua $M(0; 1; 2)$, $N(0; 1; 1)$, $E(2; 0; 0)$.
- 3) (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN (với M, N ở ý 2).
- 4) (P) đi qua các hình chiếu của $A(1; 2; 3)$ lên các trục tọa độ.
- 5) (P) đi qua $B(1; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$ và vuông góc với

$$(R): x + y + z + 1 = 0.$$

6) (P) đi qua $D(-1; 2; 3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng:

$$(\alpha): x - 2 = 0; (\beta): y - z - 1 = 0.$$

Bài 3.3.2. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$$A(-1; 1; -3), B(0; 2; 5), C(2; -3; -2), D(7; -2; 1).$$

- 1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng
- 2) Tìm tọa độ hình chiếu K của D lên mặt phẳng (ABC)

Bài 3.3.3. Cho ba mặt phẳng: $(\alpha_1): x + y + z - 3 = 0;$

$$(\alpha_2): 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \text{ và}$$

$$(\alpha_3): x - 2y + 2z + 4 = 0.$$

- 1) Chứng minh các cặp mp (α_1) và (α_2) ; (α_1) và (α_3) cắt nhau.
- 2) Viết phương trình (P) đi qua $A(1; 0; 1)$ và giao tuyến của (α_1) và (α_2) .
- 3) Viết phương trình (Q) đi qua giao tuyến của hai mp (α_1) và (α_2) và đồng thời vuông góc với mp (α_3) .

Bài 3.3.4. Trong không gian Oxyz cho 4 điểm

$$A(1; 1; 1), B(-1; 2; 0), C(-2; 0; -1), D(3; -1; 2).$$

- 1) Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.
- 2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua AB và song song với CD.
- 3) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua AB và cách đều C, D.
- 4) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua BC và cách A một khoảng lớn nhất.

Bài 3.3.5. Lập phương trình (P) biết (P):

- 1) Song song với (Q): $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ và khoảng cách từ O đến (P) bằng 5.
- 2) Đi qua giao tuyến của hai mp $(\alpha): x - 3z - 2 = 0; (\beta): y - 2z + 1 = 0$ và khoảng cách từ $M(0; 0; \frac{1}{2})$ đến (P) bằng $\frac{7}{6\sqrt{3}}$.

Bài 3.3.6. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

- 1) (α) qua hai điểm $A(1; 2; -1), B(0; -3; 2)$ và vuông góc với (P): $2x - y - z + 1 = 0$.
- 2) (α) cách đều hai mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 2z + 2 = 0, (\gamma): 2x + 2y + z + 3 = 0$.
- 3) (α) qua hai điểm $C(-1; 0; 2), D(1; -2; 3)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) là 2.

- 4) (α) đi qua $E(0; 1; 1)$ và $d(A, (\alpha)) = 2; d(B, (\alpha)) = \frac{11}{7}$, trong đó $A(1; 2; -1), B(0; -3; 2)$.

Bài 3.3.7. Trong không gian Oxyz cho 2 điểm $A(-1; 3; -2), B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

- 1) Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P) .
- 2) Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Bài 3.3.8. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

- 1) (α) đi qua $A(1; 0; 2), B(2; -3; 3)$ và tạo với mặt phẳng $(\beta): 4x + y + z - 3 = 0$ một góc 60° .
- 2) (α) đi qua $C(2; -3; 5)$, vuông góc với $(P): x - 5y - z + 1 = 0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z - 3 = 0$ góc 45° .

Bài 3.3.9. Trong không gian Oxyz cho ba điểm

$$A(2; 3; 1), B(-1; -2; 0), C(1; 2; -2)$$

- 1) Lập phương trình mặt phẳng (ABC) ,
- 2) Tìm a, b để mặt phẳng $(\alpha): (2a + b)x + (3a + 2b)y - 1z + 1 = 0$ song song với (ABC) ,
- 3) Tìm $M \in (\beta): 3x + y - z + 1 = 0$ sao cho $S = 2MA^2 + 4MB^2 - 3MC^2$ nhỏ nhất,
- 4) Tìm $N \in (\gamma): 3x + 3y - z - 29 = 0$ sao cho $P = |3\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} + 7\overrightarrow{NC}|$ nhỏ nhất.

Bài 3.3.10. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(1; 4; 9)$ sao cho (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C thỏa mãn:

- 1) M là trọng tâm tam giác ABC,
- 2) Tứ diện OABC có thể tích lớn nhất,
- 3) Khoảng cách từ O đến (ABC) lớn nhất,
- 4) $OA + OC = 4OB$ và $OA = OB + 9$.

Bài 3.3.11. Trong không gian Oxyz cho ba điểm

$$A(3; 0; 0), B(1; 2; 1), C(2; -1; 2).$$

- 1) Lập phương trình mặt phẳng qua A, B và cắt trục Oz tại điểm M sao cho diện tích tam giác MAB bằng $\frac{9}{2}$ (đvdt).
- 2) Lập phương trình mặt phẳng qua C, A và cắt trục Oy tại điểm N sao cho thể tích khối tứ diện ABCN bằng 12 (đvtt).

- 3) Lập phương trình mặt phẳng (α) qua ba điểm B, C và tâm mặt cầu nội tiếp hình tứ diện OABC.

Bài 3.3.12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(2; 0; 1)$, $B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối A - 2011)

Bài 3.3.13. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối A - 2011)

Bài 3.3.14. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối B - 2010)

Bài 3.3.15. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối D - 2010)

Bài 3.3.16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(2; -1; 1)$ và $D(0; 3; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối B - 2009)

Bài 3.3.17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$.

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.
- Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho $MA = MB = MC$.

(Trích đề thi ĐH khối B - 2008)

Bài 3.3.18. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(3m + 1; 1; 6m)$,

$B(5m + 1; 2 - m; 9m + 1)$, trong đó m là tham số. Chứng minh rằng khi m thay đổi thì A, B luôn nằm trong một mặt phẳng (α) cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Bài 3.3.19. Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có

$A(1; 1; 1), B(2; 0; 2), C(-1; -1; 0), D(0; 3; 4)$

Trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm B', C', D' thỏa mãn

$$\frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} + \frac{AD'}{AD} = 4.$$

- 1) Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích lớn nhất.
- 2) Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD cắt AC, BD lần lượt tại M và N thỏa mãn $AM + BN = 6$.

Hướng dẫn giải

Bài 3.3.1.

- 1) Ta có $\vec{n}_Q = (1; 1; 3)$ là một VTPT của (Q) . Vì $(P) \parallel (Q)$ nên (P) có một VTPT $\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (1; 1; 3)$. Vậy (P) có phương trình là:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z - 6 = 0.$$

- 2) Vì (P) đi qua M, N, E nên $\vec{n} = [\vec{MN}, \vec{NP}] = (-1; -2; 0)$ là một VTPT của (P) .

Vậy phương trình của (P) : $x + 2y = 0$.

- 3) Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(0; 1; \frac{3}{2})$. Vì (P) là mp trung trực của đoạn MN nên (P) đi qua I và nhận $\vec{MI} = (0; 0; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) : $2z - 3 = 0$.

- 4) Tọa độ hình chiếu của A lên các trục tọa độ là

$$A_1(1; 0; 0), A_2(0; 2; 0), A_3(0; 0; 3).$$

Áp dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(P) là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

- 5) Vì (P) đi qua B, C và vuông góc với (R) ((R) có $\vec{n}_R = (1; 1; 1)$ là một VTPT)

Nên (P) nhận $\vec{n}_P = [\vec{BC}, \vec{n}_R] = (0; 1; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) : $y - z - 2 = 0$.

6) Ta có $\vec{n}_\alpha = (1; 0; 0)$, $\vec{n}_\beta = (0; 1; -1)$ lần lượt là VTPT của (α) , (β) .

Vì (P) vuông góc với hai (α) và (β) nên $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (0; 1; 1)$ là

VTPT của (P)

Vậy phương trình (P) : $y + z - 5 = 0$.

Bài 3.3.2.

1) Ta có $\vec{AB} = (1; 1; 8)$, $\vec{AC} = (3; -4; 1)$, $\vec{AD} = (8; -3; 4) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (33; 23; -7)$

Suy ra $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 167 \neq 0$ nên A, B, C, D không đồng phẳng.

2) Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$33x + 23y - 7z - 11 = 0.$$

Gọi $K(a; b; c)$ là hình chiếu của D lên (ABC) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{DK} = t \cdot \vec{n}_{ABC} \\ K \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 7 = 33t \\ b + 2 = 23t \\ c - 1 = -7t \\ 33a + 23b - 7c - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17180}{1667} \\ b = \frac{507}{1667} \\ c = \frac{498}{1667} \end{cases}$$

Bài 3.3.3.

1) Ta có: $\vec{n}_{\alpha_1} = (1; 1; 1)$, $\vec{n}_{\alpha_2} = (2; 3; 4)$, $\vec{n}_{\alpha_3} = (1; -2; 2)$ lần lượt là VTPT

của ba mặt phẳng (α_1) , (α_2) , (α_3) . Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha_1)$ và (α_2) cắt nhau.

Tương tự ta cũng chứng minh được hai mặt phẳng (α_1) và (α_3) cắt nhau.

2) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

$$\bullet \text{ Cho } z = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(8; -5; 0) \in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$$

$$\bullet \text{ Cho } z = 1 \Rightarrow x = 9; y = -7 \Rightarrow C(9; -7; 1) \in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$$

Vì (P) đi qua A và giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên $(P) \equiv (ABC)$.

Từ đó ta lập được phương trình của (P) : $7x + 8y + 9z - 16 = 0$.

3) Vì (Q) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên (Q) đi qua hai điểm B, C.

Mặt khác: $(Q) \perp (\alpha_3)$ nên $\vec{n} = [\vec{BC}, \vec{n}_{\alpha_3}] = (-2; -1; 0)$ là VTPT của (Q) .

Vậy phương trình (Q) : $2x + y - 11 = 0$.

Bài 3.3.4.

- 1) Ta có $\vec{AB} = (-2; 1; -1)$, $\vec{AC} = (-3; 1; 2) \Rightarrow \vec{n}_{ABC} = (3; 7; 1)$

Phương trình (ABC) : $3x + 7y + z - 11 = 0$

Gọi $H(a; b; c)$ là trực tâm tam giác ABC , ta có:

$$\begin{cases} H \in (ABC) \\ \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 7b + c - 11 = 0 \\ 2a - b + c + 5 = 0 \\ 3a - b - 2c + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{72}{59} \\ b = \frac{127}{59} \\ c = -\frac{24}{59} \end{cases}$$

Vậy $H\left(-\frac{72}{59}; \frac{127}{59}; -\frac{24}{59}\right)$.

- 2) Ta có $\vec{CD} = (5; -1; 3) \Rightarrow \vec{n}_{\alpha} = \vec{AB} \wedge \vec{CD} = (2; 1; -3)$

Phương trình (α) : $2x + y - 3z = 0$.

- 3) Phương trình (β) có dạng:

$$a(x-1) + b(y-1) + c(z-1) = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

Do $B \in (\alpha)$ nên suy ra $-2a + b - c = 0 \Rightarrow c = -2a + b$

Nên ta viết lại phương trình (β) như sau:

$$ax + by + (-2a + b)z + a - 2b = 0$$

Vì (α) cách đều C, D nên $d(C, (\alpha)) = d(D, (\alpha))$

$$\Leftrightarrow |a - 3b| = |b| \Leftrightarrow a = 4b, a = 2b$$

• $a = 4b$, ta chọn $b = 1 \Rightarrow a = 4$.

Phương trình (β) : $4x + y - 7z + 2 = 0$

• $a = 2b$, ta chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Phương trình (β) : $2x + y - 3z = 0$.

- 4) Ta có phương trình BC : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu của A lên BC , suy ra $K(-1 + t; 2 + 2t; t)$,

$$\vec{AK} = (t - 2; 2t + 1; t - 1).$$

$$\text{Do } \vec{AK} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow \vec{AK} = \left(-\frac{11}{6}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P), ta có $AH = d(A, (P))$

Và $AH \leq AK$ nên $d(A, (P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK

Phương trình (P): $11x - 4y + 5z + 19 = 0$.

Bài 3.3.5.

1) Vì $(P) // (Q) \Rightarrow (P): 2x - 3y - 6z + D = 0$.

$$\text{Mà } d(O, (P)) = 5 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 5 \Leftrightarrow D = \pm 35.$$

Vậy phương trình (P): $2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$.

2) Giả sử (P): $ax + by + cz + d = 0$.

Ta có $A(2; -1; 0), B(5; 1; 1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$

$$\text{nên ta có: } \begin{cases} 2a - b + d = 0 \\ 5a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + d \\ c = -7a - 2d \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } d(M, (P)) = \frac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}c + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{7}{6\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |c + 2d| = \frac{7}{3\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 27(c + 2d)^2 = 49(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 27.49a^2 = 49[a^2 + (2a + d)^2 + (7a + 2d)^2]$$

$$\Leftrightarrow 27a^2 + 32ad + 5d^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ a = -\frac{5}{27}d \end{cases}$$

• $d = -a \Rightarrow b = a; c = -5a$

Suy ra phương trình (P): $ax + ay - 5az - a = 0 \Leftrightarrow x + y - 5z - 1 = 0$.

• $d = -\frac{27}{5}a \Rightarrow b = -\frac{17}{5}a; c = -\frac{36}{5}a$.

Suy ra phương trình (P): $5x - 17y - 36z - 27 = 0$.

Bài 3.3.6. Ta kí hiệu $\vec{n}_{(\alpha)}$ để chỉ VTPT của mặt phẳng (α) .

1) Ta có $\vec{AB}(-1; -5; 3), \vec{n}_{(P)}(2; -1; -1)$ nên $[\vec{AB}, \vec{n}_{(P)}] = (8; 5; 11)$.

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$$\vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{AB}, \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{AB}, \vec{n}_{(P)}] = (8; 5; 11).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm: $8x + 5y + 11z - 7 = 0$.

2) Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d(M, (\beta)) &= d(M, (\gamma)) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2x + 2y + z + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &\Leftrightarrow |x + 2y - 2z + 2| = |2x + 2y + z + 3| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z + 2 = 2x + 2y + z + 3 \\ x + 2y - 2z + 2 = -2x - 2y - z - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

(α): $x + 3z + 1 = 0$ hoặc (α): $3x + 4y - z + 5 = 0$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1; 0; 2)$ nên có phương trình dạng

$$a(x + 1) + by + c(z - 2) = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Vì (α) qua $D(1; -2; 3)$ nên $2a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 2a$ (1).

$$\text{Ta có } d(O, (\alpha)) = 2 \text{ nên } \frac{|a - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \quad (2).$$

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$$5a^2 - 8ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = -\frac{2}{5}b \end{cases}$$

Do $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ nên

• Với $a = 2b$ thì chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2, c = -2$, do đó phương trình

(α): $2x + y - 2z + 6 = 0$.

• Với $a = -\frac{2}{5}b$ thì chọn $b = -5 \Rightarrow a = 2, c = -14$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x - 5y - 14z + 30 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn

$$2x + y - 2z + 6 = 0, \quad 2x - 5y - 14z + 30 = 0.$$

4) Mặt phẳng (α) qua $E(0; 1; 1)$ có phương trình dạng:

$$Ax + B(y - 1) + C(z - 1) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Theo bài ra $d(A, (\alpha)) = 2; d(B, (\alpha)) = \frac{11}{7}$ nên

$$\begin{cases} \frac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 2 \\ \frac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A+B-2C| = 2\sqrt{A^2+B^2+C^2} \quad (1) \\ 11|A+B-2C| = 14|-4B+C| \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $\begin{cases} 11(A+B-2C) = 14(-4B+C) \\ 11(A+B-2C) = 14(4B-C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-67B+36C}{11} \\ A = \frac{45B+8C}{11} \end{cases}$

• Với $A = \frac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3826B^2 - 4432BC + 1368C^2 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B = C = 0$, khi đó $A = 0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$)

• Với $A = \frac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 1362B^2 + 1112BC + 136C^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{2}{3}C, B = -\frac{34}{227}C.$$

• Với $B = -\frac{2}{3}C$ thì chọn $C = -3 \Rightarrow B = 2, A = 6$ phương trình

$$(\alpha): 6x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

• Với $B = -\frac{34}{227}C$ thì chọn $C = 227 \Rightarrow B = -34, A = 26$ phương trình

$$(\alpha) \text{ là } 26x - 34y + 227z - 193 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:

$$6x + 2y - 3z + 1 = 0, \quad 26x - 34y + 227z - 193 = 0.$$

Bài 3.3.7. Ta có $\overline{AB} = (-2; 4; -16)$, $\overline{n_P} = (2; -1; 1)$ là VTPT của (P).

1) Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A, B và (Q) $\perp$ (P)

Mà $[\overline{AB}, \overline{n_P}] = (-12; -30; -6)$ nên $\overline{n_Q} = (2; 5; 1)$ là một VTPT của (Q)

Vậy phương trình của (Q): $2x + 5y + z - 11 = 0$.

- 2) Ta thấy hai điểm A, B nằm về hai phía so với mặt phẳng (P).

Gọi H(a; b; c) là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) ta có $\overrightarrow{AH} = t \cdot \overrightarrow{n_P}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a + 1 = 2t \\ b - 3 = -t \\ c + 2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2t - 1 \\ b = -t + 3 \\ c = t - 2 \end{cases}$$

Mặt khác $H \in (P)$ nên

$$2a - b + c + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) - (-t + 3) + t - 2 + 1 = 0$$

Từ đó ta tìm được $H(1; 2; -1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P), suy ra $A'(3; 1; 0)$

đồng thời A' với B nằm về hai phía so với mặt phẳng (P).

Khi đó với mọi điểm $M \in (P)$ ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$. Từ đó ta tìm được $M(2; 2; -3)$.

Bài 3.3.8.

- 1) Mặt phẳng (α) qua A(1; 0; 2) nên có phương trình dạng:

$$A(x - 1) + By + C(z - 2) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì (α) qua B(2; -3; 3) nên $A - 3B + C = 0 \Leftrightarrow A = 3B - C$.

Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = (3B - C, B, C)$, của (β) là

$\overrightarrow{n_\beta} = (4, 1, 1)$, nên

$$\cos 60^\circ = \cos(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}) = \frac{|4(3B - C) + B + C|}{\sqrt{(3B - C)^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{18}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} = \frac{|4(3B - C) + B + C|}{6\sqrt{5B^2 - 3BC + C^2}} \Leftrightarrow 9(5B^2 - 3BC + C^2) = (13B - 3C)^2$$

$$\Leftrightarrow 124B^2 - 51BC = 0 \Leftrightarrow B = 0; B = \frac{51}{124}C.$$

• Nếu $B = 0$ thì chọn $C = -1 \Rightarrow A = 1$ nên (ga): $x - z + 1 = 0$.

• Nếu $B = \frac{51}{124}C$ thì chọn $C = 124 \Rightarrow A = 29$ nên mặt phẳng cần tìm

là: (α): $29x + 51y + 124z - 277 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là:

$$(\alpha): 29x + 51y + 124z - 277 = 0; (\alpha): x - z + 1 = 0.$$

- 2) Mặt phẳng (α) qua C(2; -3; 5) nên có phương trình dạng

$$A(x - 2) + B(y + 3) + C(z - 5) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì $(\alpha) \perp (P)$ nên $A - 5B - C = 0 \Leftrightarrow A = 5B + C$ (1).

Vì góc giữa (α) và (Q) là 45° nên $\frac{|2A + 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2).

Thế (1) vào (2) ta có $\frac{|4B + C|}{\sqrt{(5B + C)^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hay

$$2(4B + C)^2 = (5B + C)^2 + B^2 + C^2 \Leftrightarrow B^2 + BC = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B = -C \end{cases}$$

Nếu $B = 0$ thì có phương trình $(\alpha): x + z - 7 = 0$.

Nếu $B = -C$ thì có phương trình $(\alpha): 4x + y - z = 0$.

Bài 3.3.9.

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -5; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (14; -8; -2)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7x - 4y - z - 1 = 0$.

2) Ta có $(\alpha) \parallel (ABC) \Leftrightarrow \frac{2a + b}{7} = \frac{3a + 2b}{-4} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{-1}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -29 \end{cases}$

3) Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$ (*)

Vì $2\overrightarrow{AE} = (2x - 4; 2y - 6; 2z - 2)$; $4\overrightarrow{BE} = (4x + 4; 4y + 8; 4z)$;

$-3\overrightarrow{CE} = (-3x + 3; -3y + 6; -3z - 6)$

Suy ra $2\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{CE} = (3x + 3; 3y + 8; 3z - 8)$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 0 \\ 3y + 8 = 0 \\ 3z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(-1; -\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } S &= 2(\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EM})^2 + 4(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EM})^2 - 3(\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EM})^2 \\ &= 3EM^2 + 2EA^2 + 4EB^2 - 3EC^2 + 2\overrightarrow{EM}(2\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{CE}) \\ &= 3EM^2 + 2EA^2 + 4EB^2 - 3EC^2 \end{aligned}$$

Vì $2EA^2 + 4EB^2 - 3EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow EM$ nhỏ nhất
 $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β) .

Gọi $M(x; y; z)$, ta có: $\overrightarrow{EM} = \left(x + 1; y + \frac{8}{3}; z - \frac{8}{3}\right)$

Do $EM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{EM} = k \cdot \vec{n}$ (Trong đó $\vec{n} = (3; 1; -1)$ là VTPT của (3))

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = k - \frac{8}{3} \\ z = -k + \frac{8}{3} \end{cases}$$

Mặt khác $M \in (\beta) \Rightarrow 3(3k - 1) + \left(k - \frac{8}{3}\right) - \left(-k + \frac{8}{3}\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 11k - \frac{22}{3} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Vậy $M(1; -2; 2)$ là điểm cần tìm.

4) Gọi $K(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{AK} - 5\overrightarrow{BK} + 7\overrightarrow{CK} = \vec{0}$ (**)

Mà $3\overrightarrow{AE} = (3x - 6; 3y - 9; 3z - 3); -5\overrightarrow{BK} = (-5x - 5; -5y - 10; -5z);$

$7\overrightarrow{CK} = (7x - 7; 7y - 14; 7z + 14)$

$$\text{Suy ra (**) } \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 18 = 0 \\ 5y - 33 = 0 \\ 5z + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{33}{5} \\ z = -\frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{18}{5}; \frac{33}{5}; -\frac{11}{5}\right).$$

Khi đó $P = 5|\overrightarrow{NK}| = 5NK$, suy ra P nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của K lên (γ)

Từ đó ta tìm được $N(3; 6; -2)$.

Bài 3.3.10. Giả sử $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Khi đó

phương trình của (α) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì (α) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$ (1)

1) Ta có: M là trọng tâm tam giác $\Leftrightarrow a = 3, b = 12, c = 27$

Nên phương trình của

$$(\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{27} = 1 \Leftrightarrow 36x + 9y + 4z - 108 = 0$$

- 2) Thể tích khối tứ diện OABC là: $V = \frac{1}{6}abc$

Từ (1), áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27.36$$

Suy ra $V \geq 6.27 = 162$. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 12, c = 27.$$

Vậy phương trình (α): $36x + 9y + 4z - 108 = 0$.

- 3) Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng

$$(ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH \leq OM$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv M$ hay mặt phẳng (α) đi qua M và nhận $\overline{OM}$ làm VTPT nên phương trình (α): $x + 4y + 9z - 98 = 0$.

- 4) Ta có: $\begin{cases} OA + OC = 4OB \\ OA = OB + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 4b \\ a = b + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3b - 9 \\ a = b + 9 \end{cases}$ thay vào (1) ta

$$\text{có được: } \frac{1}{b+9} + \frac{4}{b} + \frac{3}{b-3} = 1 \Leftrightarrow (b-9)(b^2 + 7b - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 9, b = \frac{-7 + \sqrt{97}}{2}$$

- $b = 9$ ta có phương trình (α): $x + 2y + z - 18 = 0$

- $b = \frac{-7 + \sqrt{97}}{2}$ ta có phương trình

$$(\alpha): \frac{-39 - 3\sqrt{97}}{36}x + \frac{7 + \sqrt{97}}{24}y + \frac{11 - \sqrt{97}}{12}z - 1 = 0.$$

Bài 3.3.11.

- 1) Giả sử (α) cắt trục Oz tại điểm $M(0; 0; t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AM}(-3; 0; t)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (2t; 2t - 3; 6)$.

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } S_{ABM} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(2t)^2 + (2t - 3)^2 + 6^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8t^2 - 12t + 45}. \end{aligned}$$

Theo bài ra $S_{ABM} = \frac{9}{2}$, nên

$$\sqrt{8t^2 - 12t + 45} = 9 \Leftrightarrow 8t^2 - 12t - 36 = 0, \text{ hay } t = 3; t = -\frac{3}{2}.$$

• Với $t = 3$ thì $[\overline{AB}, \overline{AM}] = (6; 3; 6)$ nên phương trình

$$(\alpha): 2x + y + 2z - 6 = 0.$$

• Với $t = -\frac{3}{2}$ thì $[\overline{AB}, \overline{AM}] = (-3; -6; 6)$ nên phương trình

$$(\alpha): x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

2) Giả sử (α) cắt trục Oy tại điểm $N(0; t; 0)$.

Ta có $\overline{AB}(-2; 2; 1)$, $\overline{AC}(-1; -1; 2)$, $\overline{AN}(-3; t; 0)$ nên

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = (5; 3; 4) \Rightarrow V_{ABCN} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AN}| = \frac{1}{2} |t - 5|.$$

$$\text{Vì thế } \frac{1}{2} |t - 5| = 12 \Leftrightarrow |t - 5| = 24 \Rightarrow t = 29; t = -19.$$

• Nếu $t = 29 \Rightarrow -\frac{1}{2} [\overline{AC}, \overline{AN}] = (29; 3; 16)$ nên phương trình

$$(\alpha): 29x + 3y + 16z - 87 = 0$$

• Nếu $t = -19 \Rightarrow \frac{1}{2} [\overline{AC}, \overline{AN}] = (19; -3; 8)$ nên phương trình

$$(\alpha): 19x - 3y + 8z - 57 = 0.$$

3) Phương trình mặt phẳng (OBC): $x - y = 0$ và phương trình mặt phẳng (ABC): $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

Vì (α) đi qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC nên (α) cắt cạnh OA và $M \in (\alpha)$ thì $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC))$.

Gọi $M(x; y; z)$ thì từ điều kiện $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC))$ suy ra hai mặt phẳng chứa M thỏa mãn là $x + 3y - 5 = 0, 10x + 3y - z - 15 = 0$.

Mặt phẳng $10x + 3y - z - 15 = 0$ cắt OA tại điểm $N\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ nằm

trong đoạn thẳng OA nên mặt phẳng cần tìm là

$$(\alpha): 10x + 3y - z - 15 = 0.$$

Bài 3.3.12. Gọi E là trung điểm AB ta có: $E(1; -1; 2)$, $\overline{AE} = (-2; -2; 2)$

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AE có phương trình:

$$x + y - z + 2 = 0.$$

Vì MA = ME nên suy ra $M \in (Q) \Rightarrow M \in (P) \cap (Q)$

$$\text{Gọi } M(a; b; c) \text{ suy ra: } \begin{cases} 2a - b - c + 4 = 0 \\ a + b - c + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 + \frac{3}{2}a \\ b = 1 + \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Mặt khác: $MA^2 = 9 \Rightarrow (a-2)^2 + \left(\frac{1}{2}a+1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a+2\right)^2 = 9.$

Giải ra ta được: $a = 0, a = -\frac{6}{7}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $M(0;1;3), M\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right).$

Bài 3.3.13. Xét $B(a; b; c)$. Vì tam giác AOB đều nên ta có hệ: $\begin{cases} OA = OB \\ OA = AB \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 32 \\ (a-4)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 4 = 0 \\ c^2 = 32 - a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 - b \\ c^2 = 16 - 2b^2 + 8b \end{cases}$$

Mà $B \in (S)$ nên: $a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 4b - 4c = 0$

$$\Leftrightarrow (4-b)^2 + b^2 + 16 - 2b^2 + 8b - 4(4-b) - 4b - 4c = 0$$

Hay $c = 4 \Rightarrow b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = 0, b = 4$. Do đó $B(4; 0; 4)$ hoặc $B(0; 4; 4)$.

• $B(0; 4; 4)$ ta có $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (16; -16; 16)$ nên phương trình (OAB):

$$x - y + z = 0.$$

• $B(4; 0; 4)$ ta có $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (16; -16; -16)$ nên phương trình (OAB):

$$x - y - z = 0.$$

Bài 3.3.14. Phương trình (ABC): $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c \Rightarrow (ABC): bx + y + z - b = 0.$

Mà $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{b^2 + 2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ (do $b > 0$).

Vậy $b = c = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.3.15. Mặt phẳng (P) có $\overline{n_P} = (1; 1; 1)$ là VTPT, mp(Q) có

$$\overline{n_Q} = (1; -1; 1) \text{ là VTPT.}$$

Do $\begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \text{mp}(R) \text{ có } \overline{n_R} = \frac{1}{2}[\overline{n_P}, \overline{n_Q}] = (1; 0; -1) \text{ là VTPT}$

Suy ra (R): $x - z + m = 0$

$$\text{Ta có } d(O; (R)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+0+1}} = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy (R): } x - z \pm 2\sqrt{2} = 0.$$

Bài 3.3.16. Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) đi qua A, B song song với CD.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; 4; 0)$, suy ra

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14) \text{ là VTPT của (P).}$$

$$\text{Phương trình (P): } 4x + 2y + 7z - 15 = 0.$$

Trường hợp 2: (P) đi qua A, B và cắt CD tại I, suy ra I là trung điểm của CD. Do đó $I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0; -1; 0)$.

$$\text{Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3).$$

$$\text{Phương trình (P): } 2x + 3z - 5 = 0.$$

$$\text{Vậy (P): } 4x + 2y + 7z - 15 = 0 \text{ hoặc (P): } 2x + 3z - 5 = 0.$$

Bài 3.3.17.

1) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 4; -8)$ là một VTPT của mp(ABC).

$$\text{Phương trình mp(ABC): } x + 2y - 4z + 6 = 0.$$

Gọi H(a; b; c) là trực tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow H \in (ABC) \Rightarrow a + 2b - 4c + 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CH} = (a; b - 1; c - 2), \overrightarrow{BH} = (a - 2; b + 2; c - 1)$$

$$\forall \begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - c + 5 = 0 \\ 2a + b + c - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 0; b = 1; c = 2$. Vậy H(0; 1; 2).

2) Giả sử $M(a; b; c) \in (P) \Rightarrow 2a + 2b + c - 3 = 0 \quad (3)$

$$\begin{aligned} \text{Do } \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2b - 4c + 5 = -4a + 4b - 2c + 9 \\ -4a + 4b - 2c + 9 = 4a - 2c + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - c = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \quad (4). \end{aligned}$$

Từ (3) và (4) ta tìm được: $a = 2; b = 3; c = -7$

Vậy M(2; 3; -7) là điểm cần tìm.

Bài 3.3.18. Ta có: $\overline{AB}(2m; 1 - m; 3m + 1)$

Xét mặt phẳng cố định (α) : $ax + by + cx + d = 0$ chứa A, B.

Khi đó: $\begin{cases} A \in (\alpha) \\ \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(3m + 1) + b + c \cdot 6m + d = 0 \\ a \cdot 2m + b(1 - m) + c(1 + 3m) = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a + 6c)m + a + b + d = 0 \\ (2a - b + 3c)m + b + c = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6c = 0 \\ a + b + d = 0 \\ 2a - b + 3c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -c \\ d = 3c \end{cases}, \text{ chọn } c = -1 \Rightarrow a = 2, b = 1, d = -3$$

Vậy A, B luôn nằm trong mặt phẳng (α) : $2x + y - z - 3 = 0$.

Bài 3.3.19.

1) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}} \Rightarrow \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64} V_{ABCD}$$

Do đó $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4}$

Hay mặt phẳng $(B'C'D') \parallel (BCD)$.

$$\overline{BC} = (-3; -1; -2), \overline{BD} = (-2; 3; 2) \Rightarrow \overline{BC} \wedge \overline{BD} = (4; 10; -11)$$

$$\overline{AB'} = \frac{3}{4} \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} - 1 = \frac{3}{4} \\ y_{B'} - 1 = -\frac{3}{4} \\ z_{B'} - 1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ là: $4x + 10y - 11z + \frac{39}{4} = 0$.

2) Từ giả thiết, áp dụng định lý Talet ta có:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow BM = 2AN \Rightarrow AN = 2$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 1 = -\frac{4}{3} \\ y_N - 1 = -\frac{4}{3} \\ z_N - 1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (-8; -3; 5)$$

$$\text{Phương trình } (\alpha): 8x + 3y - 5z + \frac{16}{3} = 0.$$

Chủ đề 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

4.1. Phương pháp giải:

Phương pháp chung để lập phương trình của đường thẳng Δ ta cần đi tìm một điểm đi qua và một véc tơ chỉ phương (VTCP). Khi tìm VTCP của đường thẳng Δ , ta cần lưu ý:

- Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ cùng vuông góc với Δ thì $[\vec{a}, \vec{b}]$ là một VTCP của Δ .
- Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt M, N thì $\overrightarrow{MN}$ là một VTCP của đường thẳng Δ .

Trong một số trường hợp chúng ta thường xác định đường thẳng bằng các cách sau:

Cách 1: Tìm hai điểm A, B thuộc đường thẳng Δ . Khi tìm điểm thuộc

$$\text{đường thẳng ta cần lưu ý: } M \in d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\Leftrightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$$

Cách 2: Tìm hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng Δ . Khi đó Δ chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vì có nhiều mặt phẳng chứa Δ nên khi chọn mặt phẳng chứa Δ , ta thường dựa vào các dấu hiệu sau:

- Nếu đường thẳng d đi qua M và vuông góc với d' thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d' .
- Nếu đường thẳng Δ đi qua M và cắt đường thẳng d thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và đường thẳng d .
- Nếu đường thẳng Δ đi qua M và song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và song song với (P) .

- Nếu đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt đường thẳng d' thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng chứa d' và song song với đường thẳng d .

4.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.4.1. Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ_1, Δ_2 . Tính góc giữa hai đường thẳng và tìm giao điểm của chúng (nếu có). Biết

1) $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$.

2) $\Delta_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

3) $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+3}{-3}$ và Δ_2 là giao tuyến của hai mp
 $\begin{cases} (\alpha_1): x + y - z = 0 \\ (\alpha_2): 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Lời giải.

1) Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(1; -1; 5)$ và có $\vec{u}_1(2; 3; 1)$ là VTCP.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(-1; -1; 1)$ và có $\vec{u}_2(4; 3; 5)$ là VTCP.

Cách 1: Ta có $\vec{M_1M_2}(-2; 0; -4)$ và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (12; -6; -6)$, nên

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = -24 + 0 + 24 = 0$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M .

Cách 2: Ta có $\vec{u}_1(2; 3; 1), \vec{u}_2(4; 3; 5)$ không cùng phương nên hai đường thẳng hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

Chuyển hai phương trình về dạng tham số và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + 2u = -1 + 4v \\ -1 + 3u = -1 + 3v \\ 5 + u = 1 + 5v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - 2v = -1 \\ u - v = 0 \\ u - 5v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -1.$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $M(3; 2; 6)$.

Góc giữa hai đường thẳng

$$\begin{aligned} \cos(\Delta_1, \Delta_2) &= |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|8 + 9 + 5|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \frac{11}{5\sqrt{7}} \\ \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) &= \arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{7}}\right) \approx 33,74^\circ \end{aligned}$$

- 2) Ta có $\vec{u}_1(-1; 3; -2), \vec{u}_2(0; 0; 5)$ không cùng phương nên hai đường thẳng hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

Hệ phương trình tương giao
$$\begin{cases} -t = 0 \\ 3t = 9 \\ -1 - 2t = 5 + 5u \end{cases} \quad \text{vô nghiệm, nên hai}$$

đường thẳng chéo nhau.

Góc giữa hai đường thẳng

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 57,69^\circ$$

- 3) Ta có $\vec{u}_{\Delta_2} = [\vec{n}_{\alpha_1}, \vec{n}_{\alpha_2}] = (1; -4; -3) = \vec{u}_{\Delta_1}$ nên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Vì điểm $M(0; -3; -3) \in \Delta_1$ nhưng $M \notin \Delta_2$ nên hai đường thẳng này song song.

Góc giữa hai đường thẳng $(\Delta_1, \Delta_2) = 0^\circ$.

Chú ý. Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{và} \quad d_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$$

Ta làm như sau:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 t' \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 t' \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 t' \end{cases} \quad (*)$$

• Nếu (*) có nghiệm duy nhất $(t_0; t'_0)$ thì hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại $A(x_1 + a_1 t_0; y_1 + b_1 t_0; z_1 + c_1 t_0)$.

• Nếu (*) có vô số nghiệm thì hai đường thẳng d_1 và d_2 trùng nhau

• Nếu (*) vô nghiệm, khi đó ta xét sự cùng phương của hai véc tơ

$$\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1) \quad \text{và} \quad \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2).$$

+) Nếu $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

+) Nếu $\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ thì d_1 và d_2 chéo nhau.

Ví dụ 3.4.2. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và $mp(\alpha)$. Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có.

$$1) d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (\alpha): 3x + 4y - z - 2 = 0$$

$$2) d: \frac{x+10}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{-1} \quad (\alpha): y + 4z + 17 = 0$$

$$3) d: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3} \quad (\alpha): x + 2y - 4z + 1 = 0.$$

Lời giải.

Ta kí hiệu $\vec{u}_d$ là VTCP của đường thẳng d , $\vec{n}_\alpha$ là VTPT của $mp(\alpha)$

1) **Cách 1:** Thay phương trình của d vào phương trình của (α) ta có:

$$3(12 + 4t) + 4(9 + 3t) - 1 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow 23t + 69 = 0 \Leftrightarrow t = -3$$

Vậy d cắt (α) tại $A(0; 0; -2)$.

Cách 2: Ta có: $\vec{u}_d = (4; 3; 1)$, $\vec{n}_\alpha = (3; 4; -1) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 35 \neq 0$.

Vậy d và (α) cắt nhau.

2) **Cách 1:** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 2 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \\ y + 4z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4z - 17 \\ 2x - 6z - 49 = 0 \\ x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ này vô nghiệm suy ra $d // (\alpha)$.

Cách 2: Ta có: $\vec{u}_d = (-3; 4; -1)$, $\vec{n}_\alpha = (0; 1; 4) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

Mặt khác điểm $M(-10; 4; 1) \in d$ mà $M \notin (\alpha) \Rightarrow d // (\alpha)$.

3) Ta có $\vec{u}_d = (8; 2; 3)$, $\vec{n}_\alpha = (1; 2; -4) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ và điểm

$M(13; 1; 4) \in d$ đồng thời $M \in (\alpha) \Rightarrow d \subset (\alpha)$.

Ví dụ 3.4.3. Tính các khoảng cách sau

1) Khoảng cách từ $A(2; 3; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và

$$\Delta_2: \begin{cases} x = -3t' \\ y = 3 + t' \\ z = -2 \end{cases}$$

Lời giải.

- 1) Đường thẳng Δ đi qua $B(3; 2; 0)$ và có $\vec{u} = (1; 3; 2)$ là VTCP

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của A lên Δ , suy ra $H(3+t; 2+3t; 2t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t+1; 3t-1; 2t+1)$$

$$\text{Vì } AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(t+1) + 3(3t-1) + 2(2t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AH} = (1; -1; 1) \Rightarrow d(A, \Delta) = AH = \sqrt{3}.$$

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{u}] = (-5; -1; 4)$

$$\text{Do đó } d(A, \Delta) = \frac{\|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}]\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 4^2}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \sqrt{3}.$$

- 2) Đường thẳng Δ_1 đi qua $A_1(1; -4; 3)$ và có $\vec{u}_1 = (0; 2; 1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $A_2(0; 3; -2)$ và có $\vec{u}_2 = (-3; 1; 0)$ là VTCP

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A_1A_2} = (-1; 7; -5), [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; 6)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = -50 \neq 0$$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2]\|}{\|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]\|} = \frac{25\sqrt{46}}{23}.$$

Ví dụ 3.4.4. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-3}$ và điểm $A(2; -5; -6)$

- 1) Tìm tọa độ hình chiếu của A lên đường thẳng Δ

- 2) Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho $AM = \sqrt{35}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (2; 1; -3)$ là VTCP của đường thẳng Δ

- 1) Cách 1.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ , suy ra

$$H(1+2t; -2+t; -1-3t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-1; t+3; -3t+5).$$

$$\text{Vì } AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t+3) - 3(-3t+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(3; -1; -4)$.

Cách 2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ

Suy ra phương trình $(P): 2x + y - 3z - 17 = 0$.

Khi đó $H = \Delta \cap (P)$ nên tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 17 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-3} \end{cases}, \text{ giải hệ này ta tìm được } H(3; -1; -4).$$

2) Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t; -2+t; -1-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t-1; t+3; -3t+5)$

Nên $AM = \sqrt{35} \Leftrightarrow (2t-1)^2 + (t+3)^2 + (-3t+5)^2 = 35$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 2$$

• $t = 0 \Rightarrow M(1; -2; -1)$

• $t = 2 \Rightarrow M(5; 0; -7)$.

Ví dụ 3.4.5. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ , biết

1) Δ đi qua hai điểm $A(1; 2; 4)$ và $B(-3; 5; -1)$

2) Δ đi qua A (ở ý 1) và song song với đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

3) Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ và

$$(\beta): 2y - z - 1 = 0.$$

4) Δ nằm trong mặt phẳng (α) (ở ý 3) đồng thời Δ cắt và vuông góc với đường thẳng d (ở ý 2).

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -5)$ là một VTCP của đường thẳng Δ

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

2) Đường thẳng d có $\vec{u} = (2; 1; -1)$ là một VTCP

Do $\Delta // d$, suy ra $\vec{u} = (2; 1; -1)$ cũng là VTCP của Δ

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - t \end{cases}$$

3) Cách 1: Ta có $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_2 = (0; 2; -1)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Do $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$, suy ra $\vec{a} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}] = (-3; 1; 2)$ là VTCP của Δ

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} (*)$.

Cho $y = 1 \Rightarrow x = z = 1$, suy ra $M(1; 1; 1) \in \Delta$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Cách 2: Xét $N(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow N \in (\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Đặt $y = t$, ta có: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, đây chính là phương trình tham

số của Δ .

Cách 3: Trong hệ (*) cho $y = 0 \Rightarrow z = -1, x = 4$.

Do đó điểm $E(4; 0; -1) \in \Delta$

Hay $\Delta \equiv ME$, từ đó ta lập được phương trình tham số của Δ là:

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4) Gọi $I = d \cap \Delta$, suy ra $\begin{cases} I \in d \\ I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$, do đó tọa độ của I là

ng nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1} \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được:

$x = 5, y = 0, z = -2$ hay $I(5; 0; -2)$

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ \Delta // d \end{cases}$, suy ra $\vec{v} = [\vec{u}, \vec{n_1}] = (2; -3; 1)$ là VTCP của Δ

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Chú ý:

- Nếu đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt Δ_1 tại A thì A là giao điểm của Δ_1 và (α) .

- Nếu đường thẳng Δ cắt $\Delta_1 : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ tại A thì tọa độ của điểm $A(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

Ví dụ 3.4.6. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ , biết:

- 1) Δ đi qua $A(1; 2; 1)$ đồng thời Δ cắt đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

và vuông góc với đường thẳng $d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-2}$,

- 2) Δ đi qua $B(9; 0; -1)$, đồng thời Δ cắt hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}, \Delta_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-3}.$$

Lời giải.

- 1) **Cách 1:** Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và d_1 , khi đó ta có $\Delta \subset (P)$

Ta có đường thẳng d_1 đi qua $M(1; 2; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (1; -1; 1)$ là VTCP

Nên $\vec{n} = [\vec{AM}, \vec{u}_1] = (-1; -1; 0)$ là VTPT của (P) .

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d_2 \end{cases}$, suy ra $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{u}_2] = (2; -2; 1)$ là VTCP của Δ (trong đó

$\vec{u}_2 = (2; 1; -3)$ là VTCP của đường thẳng d_2).

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Cách 2: Gọi $E = \Delta \cap d_1$, suy ra $E(1+t; 2-t; t)$ nên $\vec{AE} = (t; -t; t-1)$

Vì $\Delta \perp d_2 \Rightarrow \vec{AE} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2t - t - 2(t-1) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \vec{AE} = (2; -2; 1)$$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

- 2) Đường thẳng Δ_1 đi qua $C(1; 3; -1)$ và có $\vec{v}_1 = (2; -1; 1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $D(-2; 3; 4)$ và có $\vec{v}_2 = (-1; 1; -3)$ là VTCP

Cách 1:

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và Δ_1 , suy ra $\Delta \subset (\alpha)$ và

$$\vec{n}_1 = [\vec{v}_1, \vec{BC}] = (-3; -8; -2) \text{ là VTPT của } (\alpha).$$

Gọi (β) là mặt phẳng đi qua B và Δ_2 , suy ra $\Delta \subset (\beta)$ và

$$\vec{n}_2 = [\vec{v}_2, \vec{BD}] = (14; 38; 8) \text{ là VTPT của } (\beta).$$

Ta có Δ là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (12; -4; -2)$ là VTCP

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-9}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 2: Giả sử Δ cắt Δ_1 tại M, cắt Δ_2 tại N.

$$\text{Ta có: } M(1+2m; 3-m; -1+m), N(-2-n; 3+n; 4-3n)$$

$$\text{Suy ra } \vec{BM} = (2m-8; -m+3; m), \vec{BN} = (-n-11; n+3; -3n+5)$$

$$\text{Vì M, N, B thẳng hàng nên } \vec{BM} = k \cdot \vec{BN} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-8 = -kn-11k \\ -m+3 = kn+3k \\ m = -3nk+5k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+kn+11k=8 \\ m+kn+3k=3 \\ m+3kn-5k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ nk=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1, n=1.$$

$$\text{Suy ra } \vec{BM} = (-6; 2; 1). \text{ Vậy phương trình } \Delta \text{ là: } \frac{x-9}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Ví dụ 3.4.7. Lập phương trình của đường thẳng Δ , biết

$$1) \Delta \text{ là hình chiếu vuông góc của } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} \text{ lên mp}$$

$$(\alpha): x+y+z-1=0.$$

$$2) \Delta \text{ đi qua } A(2; 3; -1) \text{ và cắt } d \text{ tại điểm B sao cho } d(B, (\alpha)) = 2\sqrt{3}.$$

Lời giải.

$$1) \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua } M(1; 2; 0) \text{ và có } \vec{v} = (1; 2; -1) \text{ là VTCP.}$$

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) \text{ có } \vec{n} = (1; 1; 1) \text{ là VTPT}$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$, giải hệ này ta được

$x=0, y=0, z=1$, suy ra d và (α) cắt nhau tại $I(0;0;1)$ và $I \in \Delta$.

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α)

Ta có $\vec{n}_1 = [\vec{v}, \vec{n}] = (3; -2; -1)$ là VTPT của (P)

Vì $\Delta = (\alpha) \cap (P)$ nên $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}_1] = (-1; -4; 5)$ là VTCP của Δ

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{5}$.

Cách 2. Gọi N là hình chiếu của M lên (α) , vì $MN \perp (\alpha)$ nên

$\vec{n} = (1; 1; 1)$ là VTCP của MN , suy ra phương trình MN :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

Do $N = MN \cap (\alpha)$ nên tọa độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được: $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}, z = -\frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng $\Delta \equiv IN$, từ đó ta lập được phương trình Δ :

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{5}$$

2) Vì $B \in d \Rightarrow B(1+t; 2+2t; -t)$, khi đó

$$d(B, (\alpha)) = \frac{|2t+2|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-4 \end{cases}$$

• $t=2 \Rightarrow B(3; 6; -2) \Rightarrow \overline{AB} = (1; 3; -1)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

• $t=-2 \Rightarrow B(-3; -6; 2) \Rightarrow \overline{AB} = (-5; -9; 3)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x+3}{-5} = \frac{y+6}{-9} = \frac{z-2}{3}$$

Ví dụ 3.4.8. Lập phương trình đường thẳng Δ , biết

- 1) Δ nằm trong (P): $y + 2z = 0$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}$$

- 2) Δ đi qua $M(-4; -5; 3)$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

- 3) Δ đi qua $M(0; 1; 1)$, vuông góc với $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và cắt

$$\text{đường thẳng } d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Lời giải.

- 1) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (P) với d_1, d_2

Thay phương trình d_1 vào phương trình (P) ta có:

$$t + 8t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(1; 0; 0).$$

Thay phương trình d_2 vào phương trình (P) ta có:

$$2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow B(6; -2; 1).$$

Vì Δ nằm trong (P) đồng thời Δ cắt d_1, d_2 nên Δ đi qua A, B

Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{AB} = (5; -2; 1)$ làm VTCP.

$$\text{Vậy phương trình của đường thẳng } \Delta \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- 2) Ta có d_1 đi qua $M_1(-1; -3; 2)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (3; -2; -1)$ là VTCP

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(2; -1; 1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (2; 3; -5)$ là VTCP

Gọi (P) là mp đi qua M và chứa đường thẳng d_1 .

Khi đó (P) có $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{MM_1} \wedge \overrightarrow{u_1} = (-4; 0; -12)$ là VTPT

Tương tự gọi (Q) là mp đi qua M và đường thẳng d_2 , suy ra

$\overrightarrow{n_Q} = (7; -13; -5)$ là VTPT của (Q).

Vì Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 nên Δ là giao tuyến của (P) và (Q)

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = -52(3; 2; -1)$ là VTCP của Δ .

$$\text{Phương trình } \Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -5 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

3) **Cách 1:** Đường thẳng d_2 đi qua $A(-1; 0; 1)$ và có $\overrightarrow{u_2} = (0; 1; 1)$ là VTCP

Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1} = (3; 1; 1)$ là VTCP

Gọi (P) là mp đi qua M vuông góc với đường thẳng d_1 , suy ra

$\overrightarrow{n_P} = (3; 1; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi (Q) là mp đi qua M và cắt đường thẳng d_2 .

Suy ra $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{MA} = (1; -1; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (Q).

Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên suy ra

$\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = 2(1; -1; -2)$ là VTCP của Δ .

$$\text{Phương trình } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Cách 2: Gọi $N = \Delta \cap d_2 \Rightarrow N(-1; t; t+1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; t-1; t)$

Vì Δ vuông góc với $d_1 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; 1; 2)$

$$\text{Phương trình } \Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Ví dụ 3.4.9. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và

mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 11 = 0$.

1) Lập phương trình hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α)

2) Viết phương trình đường thẳng Δ_1 nằm trong (α) đồng thời cắt và vuông góc với Δ .

3) Viết phương trình đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (α) , cắt

Δ và tạo với đường thẳng Δ một góc φ thỏa $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2; 1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta}} = (1; -1; 2)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{n_{\alpha}} = (2; 1; 2)$.

$$1) \text{ Cách 1: Ta thấy hệ phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \\ 2x + y + 2z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Suy ra $\Delta \cap (P) = I(2; 1; 3)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên (α) , suy ra phương trình MH:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Suy ra $H(1 + 2t; 2 + t; 1 + 2t)$.

Do $H \in (\alpha)$ nên ta có: $2(1 + 2t) + 2 + t + 2(1 + 2t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{9}$

$$\text{Hay } H\left(\frac{19}{9}; \frac{23}{9}; \frac{19}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\frac{1}{9}; \frac{14}{9}; -\frac{8}{9}\right)$$

Hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α) chính là IH

$$\text{Phương trình } IH: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-8}$$

Cách 2. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (α)

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{n_{\beta}} = \overrightarrow{n_{\alpha}} \wedge \overrightarrow{u_{\Delta}} = (4; -2; -3)$$

Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α) , ta có $\Delta' = (\alpha) \cap (\beta)$

Suy ra $\overrightarrow{u_{\Delta'}} = \overrightarrow{n_{\alpha}} \wedge \overrightarrow{n_{\beta}} = (1; 14; -8)$ và $I \in \Delta'$ nên phương trình Δ' là:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-8}$$

$$2) \text{ Gọi } J = \Delta_1 \cap \Delta \Rightarrow J = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow J \equiv I$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \Delta_1 \cap (\alpha) \\ \Delta_1 \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta_1}} = \overrightarrow{n_{\alpha}} \wedge \overrightarrow{u_{\Delta}} = (4; -2; -3)$$

$$\text{Phương trình } \Delta_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$$

$$3) \text{ Vì } \Delta_2 \text{ nằm trong mặt phẳng } (\alpha) \text{ và cắt } \Delta \text{ nên } \Delta_2 \text{ đi qua } I.$$

Gọi $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (a; b; c)$, ta có:

$$\vec{u}_{\Delta_2} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = -2a - 2c$$

$$\text{Mặt khác: } \cos \varphi = \frac{|\vec{u}_{\Delta_2} \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_{\Delta_2}| \cdot |\vec{u}_\Delta|} = \frac{|a - b + 2c|}{\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{|3a + 4c|}{\sqrt{6(5a^2 + 8ac + 5c^2)}}$$

$$\text{Do đó } \cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow \frac{|3a + 4c|}{\sqrt{6(5a^2 + 8ac + 5c^2)}} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}|3a + 4c| = 7\sqrt{5a^2 + 8ac + 5c^2}$$

$$\Leftrightarrow 18(3a + 4c)^2 = 49(5a^2 + 8ac + 5c^2)$$

$$\Leftrightarrow 83a^2 - 40ac - 43c^2 = 0 \Leftrightarrow a = c, a = -\frac{43}{83}c$$

$$\bullet a = c \Rightarrow b = -4a, \text{ chọn } a = 1 \Rightarrow b = -4, c = 1$$

$$\text{Phương trình } \Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{1}$$

$$\bullet a = -\frac{43}{83}c, \text{ chọn } a = 43 \Rightarrow b = 80, c = -83$$

$$\text{Phương trình } \Delta_2: \frac{x-2}{43} = \frac{y-1}{80} = \frac{z-3}{-83}$$

Ví dụ 3.4.10. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2} \text{ và } d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

- Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại M, N thỏa mãn $MN = 3\sqrt{3}$ và MN song song với $mp(\alpha): x - 2y + 3z = 0$.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua O và cắt d_2 tại A sao cho mặt cầu tâm A và đi qua O tiếp xúc với mặt phẳng $(\beta): 5x + y - 4z - 16 = 0$.

Lời giải.

- Vì $M \in d_1, N \in d_2$ nên suy ra

$$M(1+m; -1+2m; -2m), N(3+2n; -3+n; 2-n)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = (2n-m+2; n-2m-2; -n+2m+2)$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} MN^2 = 27 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2n-m+2)^2 + 2(n-2m-2)^2 = 27 \\ 2n-m+2-2(n-2m-2)+3(-n+2m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 3m + 4 \\ (5m + 10)^2 + 2(m + 2)^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -3 \\ n = -5 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}, \text{ suy ra } M(0; -3; 2), \overrightarrow{MN} = (5; -2; 1)$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x}{5} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\bullet \begin{cases} m = -3 \\ n = -5 \end{cases}, \text{ suy ra } M(-2; -7; 6), \overrightarrow{MN} = (-5; -1; 1)$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x+2}{-5} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z-6}{1}.$$

$$2) \text{ Ta có } A \in d_2 \text{ nên } A(3+2a; -3+a; 2-a)$$

Vì mặt cầu tâm A đi qua O tiếp xúc với (β) nên ta có: $OA = d(A, (\beta))$

$$\text{Mà } OA^2 = (3+2a)^2 + (a-3)^2 + (a-2)^2 = 6a^2 + 2a + 22$$

$$d(A, (\beta)) = \frac{|15a-12|}{\sqrt{42}} \text{ nên ta có:}$$

$$6a^2 + 2a + 22 = \frac{(15a-12)^2}{42} \Leftrightarrow 9a^2 + 148a + 260 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2, a = -\frac{130}{9}$$

$$\bullet a = -2, \text{ suy ra } A(-1; -5; 4) \Rightarrow \vec{u_d} = \overrightarrow{OA} = (-1; -5; 4)$$

$$\text{Phương trình } d: \frac{x}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-4}.$$

$$\bullet a = -\frac{130}{9}, \text{ suy ra}$$

$$A\left(-\frac{233}{9}; -\frac{157}{9}; \frac{148}{9}\right) \Rightarrow \vec{u_d} = -9\overrightarrow{OA} = (233; 157; -148)$$

$$\text{Phương trình } d: \frac{x}{233} = \frac{y}{157} = \frac{z}{-148}.$$

Ví dụ 3.4.11. Tìm m để hai đường thẳng sau cắt nhau và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

$$d_1: \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{m-1}$$

$$d_2: \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Lời giải.

Cách 1:

Ta có ptts của đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + (m-1)t \end{cases}$ và d_2 : $\begin{cases} x = 4 + 4t' \\ y = -t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases}$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} 6 + 2t = 4 + 4t' \\ -2 + 4t = 3 - t' \\ 3 + (m-1)t = 2 + 2t' \end{cases}$ có nghiệm duy

nhất.

Từ hai phương trình đầu của hệ ta tìm được $t = t' = 1$ thay vào phương trình thứ ba ta có: $3 + (m-1).1 = 2 + 2 \Rightarrow m = 2$.

Khi đó tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là: $A(8; 2; 4)$.

Cách 2:

Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 4; m-1)$ và đi qua $M_1(6; -2; 3)$

Đường thẳng d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (4; -1; 2)$ và đi qua $M_2(4; 0; 2)$

Do đó: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (m+7; 4m-8; -18)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; 2; -1)$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(m+7) + 2(4m-8) + 18 = 0 \\ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = 2$ và tọa độ giao điểm là: $A(8; 2; 4)$.

Ví dụ 3.4.12. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng

$$(\alpha): 2x - 2y + z - n = 0 \text{ và đường thẳng } \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2m-1}.$$

Tìm m, n để:

- 1) Đường thẳng Δ nằm trong $mp(\alpha)$.
- 2) Đường thẳng Δ song song với $mp(\alpha)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (2; -2; 1)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; -1; 3)$ và có $\vec{u} = (2; 1; 2m-1)$ là VTCP

- 1) Cách 1: Ta có $B(3; 0; 2m+2) \in \Delta$

$$\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n = 0 \\ 8 + 2m - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\alpha) \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n = 0 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2) Ta có: $\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \notin (\alpha) \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n \neq 0 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 7 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ví dụ 3.4.13. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ và } d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-3}$$

Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1; -3; -2)$ và có $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$ là VTCP

Đường thẳng d_2 đi qua $B(4; 2; 3)$ và có $\vec{u}_2 = (1; -4; -3)$ là VTCP

Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (6; 6; -6)$, $\vec{AB} = (3; 5; 5) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = 18 \neq 0$ suy ra hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 (với $M \in d_1, N \in d_2$)

Suy ra $M(1+t; -3+2t; -2+3t)$, $N(4+t'; 2-4t'; 3-3t')$

$$\Rightarrow \vec{MN} = (-t+t'; 3-2t-4t'+5; -3t-3t'+5)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-t+t'+3) + 2(-2t-4t'+5) + 3(-3t-3t'+5) = 0 \\ 1(-t+t'+3) - 4(-2t-4t'+5) - 3(-3t-3t'+5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7t + 8t' - 14 = 0 \\ 8t + 13t' - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $M(3; 1; 4)$, $\vec{MN} = (1; 1; -1)$

$$\text{Vậy phương trình MN: } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là: $MN = \sqrt{3}$.

Ví dụ 3.4.14. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}, \quad \Delta_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}.$$

- 1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- 2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua O, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2 .

Lời giải.

- 1) Ta dễ dàng chứng minh được Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Ta có $\Delta \cap \Delta_1 = A(2-a; -1+a; 2a)$, $\Delta \cap \Delta_2 = B(3+2b; 2-b; -1-b)$.

Do đó một véc tơ chỉ phương của Δ là:

$$\overrightarrow{AB}(1+2b+a; 3-b-a; -1-b-2a).$$

$$V_1 \begin{cases} \Delta \perp \Delta_1 \\ \Delta \perp \Delta_2 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{\Delta_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{\Delta_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{\Delta_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{\Delta_2} = 0 \end{cases}, \text{ do đó}$$

$$\begin{cases} -1-2b-a+3-b-a-2-2b-2a=0 \\ 2+4b+2a-3+b+a+1+b+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+5b=0 \\ 5a+6b=0 \end{cases}$$

Do đó $a=0, b=0$ nên $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB}(1; 3; -1)$.

$$\text{Phương trình đường vuông góc chung cần tìm là } \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+3t \\ z=-t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

- 2) Gọi $M = \Delta \cap \Delta_1 \Rightarrow M(2-m; -1+m; 2m) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (2-m; -1+m; 2m)$

$$\text{Vì } \Delta \perp \Delta_2 \text{ nên } \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_{\Delta_2} = 0 \Leftrightarrow 2(2-m) - (-1+m) - 2m = 0 \Leftrightarrow m=1$$

Suy ra $\vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{OM} = (1; 0; 2)$.

$$\text{Phương trình } \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.4.15. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}; \quad d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-4}$$

- 1) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và d_1 ,

- 2) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_1 và d_2 .

Lời giải.

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua $M(1; -1; -2)$, VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $N(2; -2; 1)$, VTCP $\vec{u}_2 = (1; 2; -4)$

- 1) Ta có: $\vec{AM} = (0; -3; -5)$

Do (P) đi qua A và d_1 nên $\vec{n}_P = \vec{AM} \wedge \vec{u}_1 = (-8; 10; -6)$

Suy ra phương trình (P): $4x - 5y + 3z - 3 = 0$.

- 2) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + t' \\ -1 + t = -2 + 2t' \\ -2 - t = 1 - 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = 1 \\ t - 2t' = -1 \\ -t + 4t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 1$$

Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau tại $E(3; 0; -3)$.

Ta có $\vec{n}_Q = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-2; 7; 3)$

Phương trình (Q): $2x - 7y - 3z - 15 = 0$.

Ví dụ 3.4.16. Trong không gian với hệ tọa độ để các vuông góc Oxyz cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; m)$ với $m \neq 0$ là tham số.

- 1) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD khi $m = 2$,
- 2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BD. Tìm các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OBH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có: $\vec{AB} = (0; 1; 0)$, $\vec{CD} = (0; -1; m)$

- 1) Với $m = 2$ ta có: $\vec{CD} = (0; -1; 2)$ và $\vec{AC} = (-1; 1; 0)$

Do đó $[\vec{AB}, \vec{CD}] = (2; 0; 0) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{CD}] \cdot \vec{AC} = -2$

$$\text{Vậy } d(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{CD}] \cdot \vec{AC}|}{\|[\vec{AB}, \vec{CD}]\|} = \frac{2}{2} = 1.$$

- 2) Đặt $x = OH \Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{2 - x^2}$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta OBH} = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{2 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(2 - x^2)} \leq \frac{1}{4} (x^2 + 2 - x^2) = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OH = 1 \Leftrightarrow d(O, BD) = 1$

Ta có: $\vec{BD} = (-1; -1; m)$, $\vec{OB} = (1; 1; 0) \Rightarrow [\vec{BD}, \vec{OB}] = (-m; m; 0)$

$$\text{Do đó } d(O, BD) = \frac{|\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2+m^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 = 2 + m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.4.17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}; \quad d_2: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2 . Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho MN song song với mp(P): $x - y + z = 0$ và độ dài $MN = \sqrt{2}$.

Lời giải.

1) Đường thẳng d_1 đi qua $O(0;0;0)$ có $\vec{u}_1 = (1;1;2)$ là VTCP,

Đường thẳng d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (-2;1;1)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} = (-1;0;1), \quad [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1;-5;3) \Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \overrightarrow{OA} = 4 \neq 0$$

Do đó d_1, d_2 chéo nhau.

$$\text{Ta có } M \in d_1 \Rightarrow M(t; t; 2t), \quad N \in d_2 \Rightarrow N(-1-2s; s; 1+s)$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} MN \parallel (P) \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_P = 0 \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -s \\ \sqrt{(t-s)^2 + 4t^2 + (1-3t)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải hệ và kiểm tra điều kiện song song ta được

$$M\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right), N\left(\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right) \text{ thỏa mãn.}$$

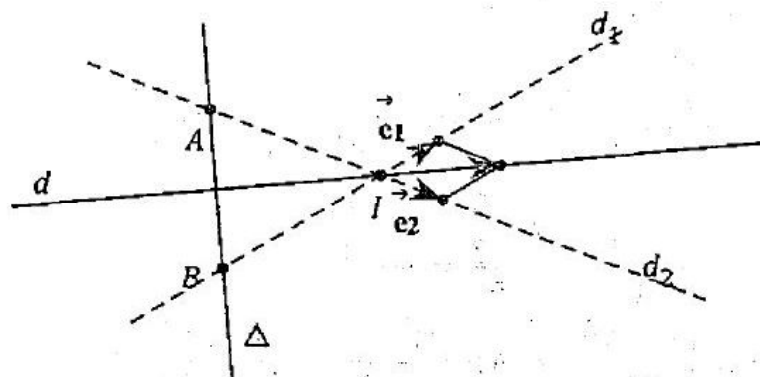
Ví dụ 3.4.18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}; \quad d_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$$

1) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng Δ tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 một tam giác cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

2) Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Lời giải.



1) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1} \\ \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại giao điểm $I(1; 1; 2)$.

d_1 đi qua điểm $M_1(3; 3; 3)$ có $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$ là VTCP;

d_2 đi qua $M_2(-5; -2; 0)$ và có $\vec{u}_2 = (6; 3; 2)$ là VTCP.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2

Ta có: $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{20}{21} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{41}}{21}$

Giả sử $IA = IB = a > 0$. Diện tích của tam giác IAB là:

$$S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \varphi = a^2 \frac{\sqrt{41}}{42} = \frac{\sqrt{41}}{42} \Rightarrow a = 1.$$

Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(3+2t; 3+2t; 3+t) \Rightarrow \vec{IA} = (2t+2; 2t+2; t+1)$

Nên $IA^2 = 1 \Leftrightarrow 9(t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A_1(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}), A_2(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}).$

$B \in d_2 \Rightarrow B(-5+6t; -2+3t; 2t) \Rightarrow \vec{IB} = (6t-6; 3t-3; 2t-2)$

Do đó: $IB^2 = 1 \Leftrightarrow 49(t-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{7} \\ t = \frac{6}{7} \end{cases}$

Suy ra $B_1(\frac{13}{7}; \frac{10}{7}; \frac{16}{7})$, $B_2(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7})$.

Vậy ta có 4 trường hợp là:

$$\bullet A(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}); B(\frac{13}{7}; \frac{10}{7}; \frac{16}{7}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\frac{4}{21}; -\frac{5}{21}; -\frac{1}{21})$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x - \frac{5}{3}}{4} = \frac{y - \frac{5}{3}}{-5} = \frac{z - \frac{7}{3}}{-1}$$

$$\bullet A(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}); B(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-\frac{32}{21}; -\frac{23}{21}; -\frac{13}{21})$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x - \frac{5}{3}}{32} = \frac{y - \frac{5}{3}}{23} = \frac{z - \frac{7}{3}}{13}$$

$$\bullet A(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}); B(\frac{13}{7}; \frac{10}{7}; \frac{16}{7}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\frac{32}{21}; \frac{23}{21}; \frac{13}{21})$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x - \frac{1}{3}}{32} = \frac{y - \frac{1}{3}}{23} = \frac{z - \frac{5}{3}}{13}$$

$$\bullet A(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}); B(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-\frac{4}{21}; \frac{5}{21}; \frac{1}{21})$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x - \frac{1}{3}}{4} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-5} = \frac{z - \frac{5}{3}}{-1}$$

2) Gọi d là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 .

$$\text{Ta có } I \in d. \text{ Đặt } \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{u_1}|} \overrightarrow{u_1} = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}), \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{|\overrightarrow{u_2}|} \overrightarrow{u_2} = (\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{2}{7})$$

Khi đó $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ là các véc tơ đơn vị trên d_1, d_2 . Suy ra $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} \pm \overrightarrow{e_2}$

$$\bullet \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = (\frac{32}{21}; \frac{23}{21}; \frac{13}{21}), \text{ suy ra phương trình } d \text{ là:}$$

$$\frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$$

$$\bullet \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = (-\frac{4}{21}; \frac{5}{21}; \frac{1}{21}), \text{ suy ra phương trình } d \text{ là:}$$

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$$

Ví dụ 3.4.19. Trong không gian Oxyz cho hình chóp S.ABC có $S(2; 1; 2)$,

$A(3; 0; -1)$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC lần lượt là hai điểm M, N và mặt phẳng (AMN) có phương trình $2y + 3z + 3 = 0$. Gọi D là điểm đối xứng với A qua trung điểm E của BC.

- 1) Viết phương trình đường thẳng SD
- 2) Viết phương trình đường thẳng BC.

Lời giải.

- 1) Từ giả thiết ta suy ra được ABDC là hình vuông

Ta có: $BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$,

lại có $AM \perp SB$ nên suy ra $AM \perp (SBD)$

hay ta suy ra được $AM \perp AD$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$

Suy ra $SD \perp (AMN)$.

$$\text{Vậy phương trình SD: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

- 2) Ta có $\overrightarrow{SA} = (1; -1; -3)$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) là:

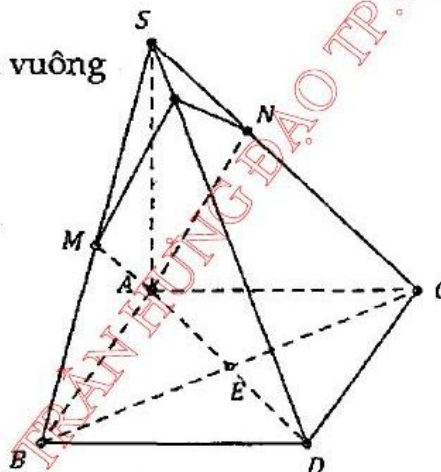
$$x - y - 3z - 6 = 0.$$

Vì $D = SD \cap (ABC)$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \\ x - y - 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow D(2; -1; -1)$$

Suy ra trung điểm của BC là: $E\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$

$$\text{Phương trình BC: } \begin{cases} x = \frac{5}{2} + t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = -1 \end{cases}$$



Ví dụ 3.4.20. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-5}; d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B, đồng thời khoảng cách từ Δ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$. Viết phương trình Δ , biết điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Ta có $A \in d_1$ nên $A(3+a; 1+2a; -5a)$,

$B \in d_2 \Rightarrow B(2+3b; 1-b; 3+2b)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3b-a-1; -b-2a; 2b+5a+3)$

Do Δ cách (α) một khoảng bằng $\sqrt{6}$ nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} // (\alpha) \\ d(A, (\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_{\alpha} = 0 \\ d(A, (\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3b-a-1) + (-b-2a) + (2b+5a+3) = 0 \\ \frac{|a|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \text{ (do } x_A > 0) \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow A(9; 13; -30), \overrightarrow{AB} = (-10; -11; 31)$$

$$\text{Phương trình } \Delta: \frac{x-9}{10} = \frac{y-13}{11} = \frac{z+30}{-31}.$$

Ví dụ 3.4.21. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$

- Hai điểm M, N di động trên d_1 sao cho $MN = 4$. Tìm trên đường thẳng d_2 điểm P sao cho tam giác MPN có diện tích bằng 2.
- Tìm A, B $\in d_1$ và C, D $\in d_2$ sao cho ABCD là tứ diện đều.

Lời giải

1) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1; 2; 3)$, VTCP $\vec{u}_1 = (-2; 1; -2)$

d_2 đi qua $M_2(3; 1; 2)$, VTCP $\vec{u}_2 = (-1; 2; 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -1; -1)$, $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (6; 6; -3)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = 9 \neq 0$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau

$$\text{và } d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2}(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})|}{|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}|} = 1.$$

Gọi H là hình chiếu của P lên MN, ta có: $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} PH \cdot MN$

$$\text{Mà } MN = 4, S_{\Delta MNP} = 2 \Rightarrow PH = 1 = d(d_1, d_2)$$

Từ đó ta suy ra được PH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Vì $P \in d_2$ nên $P(3-k; 1+2k; 2+2k)$, $H \in d_1$ nên $H(1-2t; 2+t; 3-2t)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{PH} = (-2t+k-2; t-2k+1; -2t-2k+1)$$

$$\text{Do } \begin{cases} PH \perp d_1 \\ PH \perp d_2 \end{cases} \text{ nên ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-2t+k-2) + t-2k+1 - 2(-2t-2k+1) = 0 \\ -(-2t+k-2) + 2(t-2k+1) + 2(-2t-2k+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t+3=0 \\ -9k+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ k=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ Vậy } P\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right).$$

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta chứng minh được MN là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

$$\text{Suy ra } M \equiv H, N \equiv P \text{ nên } N\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right), M\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right) \text{ và } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Gọi a là độ dài các cạnh của tứ diện ABCD, ta có:

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$A \in d_1 \Rightarrow A(1-2t; 2+t; 3-2t) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \left(-2t-\frac{2}{3}; t+\frac{1}{3}; -2t-\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } MA^2 = 9\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{6}.$$

$$A\left(\frac{5-\sqrt{2}}{3}; \frac{10+\sqrt{2}}{6}; \frac{11-\sqrt{2}}{3}\right) \text{ và } B\left(\frac{5+\sqrt{2}}{3}; \frac{10-\sqrt{2}}{6}; \frac{11+\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\text{Tương tự: } C(3-k; 1+2k; 2+2k) \text{ và } CN = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên ta có:}$$

$$9\left(k - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{6}$$

Suy ra $C\left(\frac{14 - \sqrt{2}}{6}; \frac{7 + \sqrt{2}}{3}; \frac{10 + \sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\frac{14 + \sqrt{2}}{6}; \frac{7 - \sqrt{2}}{3}; \frac{10 - \sqrt{2}}{3}\right)$.

Thử lại ta thấy $AB = AC = AD = BC = BD = CD = \sqrt{2}$

Hay tứ diện ABCD là tứ diện đều.

Vậy $A\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{3}; \frac{10 + \sqrt{2}}{6}; \frac{11 - \sqrt{2}}{3}\right); B\left(\frac{5 + \sqrt{2}}{3}; \frac{10 - \sqrt{2}}{6}; \frac{11 + \sqrt{2}}{3}\right);$

$C\left(\frac{14 - \sqrt{2}}{6}; \frac{7 + \sqrt{2}}{3}; \frac{10 + \sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\frac{14 + \sqrt{2}}{6}; \frac{7 - \sqrt{2}}{3}; \frac{10 - \sqrt{2}}{3}\right)$.

Trong đó A, B và C, D có thể hoán vị cho nhau.

4.3. Bài tập vận dụng

Bài 3.4.1. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau

1) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$

2) $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+6}{1}$

3) $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ và $d_2: \frac{2x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Bài 3.4.2. Tính các khoảng cách sau

1) Khoảng cách từ $A(3; 2; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{4}$.

3) Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 4x + 2z + 1 = 0$.

Bài 3.4.3. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp(α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có.

1) $d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}; (\alpha): 3x + 4y - z - 2 = 0$

$$2) d: \frac{x+10}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{-1}; \quad (\alpha): y+4z+17=0$$

$$3) d: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}; \quad (\alpha): x+2y-4z+1=0.$$

Bài 3.4.4. Tìm m để

$$1) \text{ Hai đường thẳng } d_1: \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1+m}{m-1} \text{ và}$$

$$d_2: \frac{x-4}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{2} \text{ cắt nhau.}$$

Tìm giao điểm của chúng.

$$2) \text{ Đường thẳng } d_m: \begin{cases} x = (-2m^2 + m + 1)t \\ y = 1 - (4m^2 + 4m + 1)t \\ z = -2 + (m^2 - m)t \end{cases} \text{ song song với}$$

$$(P): 2x - y + 2 = 0.$$

Bài 3.4.5. Lập ptts và ptct của đường thẳng d biết:

$$1) d \text{ đi qua } A(2; 0; 1) \text{ và có } \vec{u} = (1; -1; -1) \text{ là VTCP.}$$

$$2) d \text{ đi qua } A(1; 2; 1) \text{ và } B(-1; 0; 0),$$

$$3) d \text{ đi qua } M(-2; 1; 0) \text{ và vuông góc với } (P): x + 2y - 2z + 1 = 0,$$

$$4) d \text{ đi qua } N(-1; 2; -3) \text{ và song song với } \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{3-z}{1}.$$

$$5) d \text{ là giao tuyến của hai mặt phẳng } (\alpha): x + y - z + 3 = 0 \text{ và } (\beta): 2x - y + 5z - 4 = 0.$$

Bài 3.4.6. Lập phương trình của đường thẳng Δ biết

$$1) \Delta \text{ đi qua } M(1; 0; -1) \text{ và vuông góc với hai đường thẳng}$$

$$d_1: \frac{x}{-5} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-1}{3}; \quad d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$2) \Delta \text{ đi qua } M(1; 4; -2) \text{ và song song với hai mặt phẳng}$$

$$(P): 6x + 6y + 2z + 3 = 0 \text{ và } (Q): 3x - 5y - 2z - 1 = 0.$$

$$3) \Delta \text{ nằm trong } (P): y + 2z = 0 \text{ và cắt hai đường thẳng}$$

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}$$

- 4) Δ đi qua $M(-4; -5; 3)$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

- 5) Δ đi qua $M(0; 1; 1)$, vuông góc với $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và cắt

$$\text{đường thẳng } d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Bài 3.4.7. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1} \text{ và điểm } A(4; 3; 2).$$

- 1) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM = \sqrt{105}$.
- 2) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua Δ .
- 3) Tìm tọa độ điểm D thuộc Δ sao cho khoảng cách từ D đến
(α): $x - 2y + 2z + 2 = 0$ bằng 1.

Bài 3.4.8. Viết phương trình đường thẳng Δ biết

- 1) Δ đi qua $A(-2; 2; 1)$ và cắt Oy tại điểm B sao cho $OB = 2OA$
- 2) Δ đi qua $B(1; 1; 2)$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ tại
C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

Bài 3.4.9. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+9}{-2}$$

- 1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
- 2) Hai điểm A, B thay đổi trên Δ_1 sao cho $AB = 3$. Tìm điểm C trên đường thẳng Δ_2 sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.
- 3) Viết phương trình đường thẳng d cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại M, N thỏa mãn $MN = 6\sqrt{5}$ và d tạo với Δ_1 một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{15}}$.

Bài 3.4.10. Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (P): 2x - y + 2z = 11 = 0.$$

- 1) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $A(1; -2; -5)$ trên Δ .
- 2) Tìm tọa độ điểm A' sao cho $AA' = 2AH$ và ba điểm A, A', H thẳng hàng.
- 3) Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm $B(1; -1; 2)$ qua (P) .

Bài 3.4.11. Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

- 1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau và lập phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.
- 2) Tìm điểm M thuộc Δ_1 có khoảng cách đến Δ_2 bằng $\frac{\sqrt{210}}{3}$.
- 3) Lập phương trình tham số các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng.

Bài 3.4.12. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(5; 5; 0)$ và đường thẳng d

$$\text{có phương trình: } \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4}.$$

- 1) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d .
- 2) Tìm tọa độ điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông tại C và $BC = \sqrt{29}$.

Bài 3.4.13. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1} \text{ và mặt phẳng } (P): x + y + z - 3 = 0. \text{ Gọi } I \text{ là giao điểm của } \Delta \text{ và } (P). \text{ Tìm tọa độ điểm } M \text{ thuộc } (P) \text{ sao cho } MI \text{ vuông góc với } \Delta \text{ và } MI = 4\sqrt{14}.$$

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối B - 2011)

Bài 3.4.14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2} \text{ và hai điểm } A(-2; 1; 1), B(-3; -1; 2).$$

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối B - 2011)

Bài 3.4.15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1)$, $B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối B – 201)

Bài 3.4.16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và

đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox .

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối D – 2011)

Bài 3.4.17. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM .

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối B – 2010)

Bài 3.4.18. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối D – 2010)

Bài 3.4.19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \quad d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối A – 200)

Bài 3.4.20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có

phương trình: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối D – 2009)

Bài 3.4.21. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}, d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1} \text{ và } d_3: \begin{cases} x = -2t \\ y = -1 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và cắt d_1, d_3 lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{13}$.
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_3 . Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_2 và tạo với mặt phẳng (P) một góc φ thỏa mãn $\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{145}}$.

Bài 3.4.22. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{3} \text{ và điểm } M(1; 2; 0).$$

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, song song với Δ và (α) tạo với ba tia Ox, Oy, Oz một tứ diện có thể tích bằng 8,
- Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, vuông góc với $(P): x + y + z - 3 = 0$ và tạo với Δ một góc φ thỏa mãn $\cos \varphi = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{34}}$.

Bài 3.4.23. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}, d_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{4}, d_3: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A(1; 2; 3), B(-1; 0; 2) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại C, D sao cho $CD = \sqrt{38}$.
- Viết phương trình mặt phẳng (β) song song và cách đều hai đường thẳng d_1 và d_3 .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O và cắt d_2, d_3 lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN = \sqrt{14}$ đồng thời MN song song với mặt phẳng $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$ và $x_N < -\frac{1}{2}$.

Bài 3.4.24. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 28 = 0 \text{ và hai đường thẳng}$$

$$d_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}; d_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{1}.$$

- Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng d_1, d_2 .

- 2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_1 và tạo với d_2 một góc φ thỏa mãn $\cos \varphi = \frac{\sqrt{42}}{7}$.
- 3) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d_2 và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{2\sqrt{93}}{3}$.

Bài 3.4.25. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } \Delta_2 : \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{-1}.$$

- 1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- 2) Cho A, B là hai điểm di động trên Δ_1 thỏa $AB = 4$. Viết phương trình đường thẳng đi qua O và cắt Δ_2 tại C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.
- 3) Có tồn tại hay không một tứ diện đều có hai đỉnh thuộc Δ_1 và hai đỉnh thuộc Δ_2 . Nếu có hãy tìm tọa độ các đỉnh đó.
- 4) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $P(1; 4; 5)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại K, H sao cho $PH = 2PK$.

Bài 3.4.26. Trong không gian Oxyz bốn điểm $A(3; 2; 1)$, $B(5; -2; 3)$, $C(2; 1; 0)$, $D(-4; 5; 2)$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các đường thẳng AB, CD sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Bài 3.4.1.

- 1) Đường thẳng d_1 có $\vec{u}_1 = (2; -1; -2)$ là VTCP, đường thẳng d_2 có $\vec{u}_2 = (-2; 1; 3)$ là VTCP.

$$\text{Vi hệ phương trình: } \begin{cases} 1 + 2t = -1 - 2t' \\ 3 - t = 1 + t' \\ -2t = -2 + 3t' \end{cases} \text{ vô nghiệm và } \vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2 \text{ nên ta}$$

có hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

$$2) \text{ Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1 + t = -3 + 3t' \\ 2 - 2t = 5 - t' \\ 3 + 2t = -6 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Do đó hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại $A(0; 4; -5)$.

3) Ta viết lại phương trình đường thẳng $d_2 : \frac{x + \frac{1}{2}}{-1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}$

Đường thẳng d_1 có $\vec{u}_1 = (1; -2; 2)$ là VTCP, đường thẳng d_2 có $\vec{u}_2 = (-\frac{1}{2}; 1; -1)$ là VTCP. Ta có $\vec{u}_1 = -2\vec{u}_2$ và $A(1; -2; -1) \in d_1$ nhưng $A \notin d_2$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Bài 3.4.2.

1) Đường thẳng Δ đi qua $B(-1; 2; 0)$ và có $\vec{u} = (2; 3; 1)$ là VTCP

Ta có: $\vec{AB} = (-4; 0; -1) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{u}] = (3; 2; -12)$

Vậy $d(A, \Delta) = \frac{||[\vec{AB}, \vec{u}]||}{||\vec{u}||} = \sqrt{\frac{157}{14}}$.

2) Đường thẳng Δ_1 đi qua $M(1; -1; -2)$ và có $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $N(2; 1; 3)$ và có $\vec{u}_2 = (1; -2; 4)$ là VTCP

Ta có $\vec{MN} = (1; 2; 5), [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; -3; -3) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = -19$

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{||[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN}||}{||[\vec{u}_1, \vec{u}_2]||} = \frac{19}{\sqrt{22}}$$

3) Ta thấy $C(1; 1; -2) \in \Delta$ và $\Delta // (\alpha)$ nên ta có:

$$d(\Delta, (\alpha)) = d(C, (\alpha)) = \frac{6}{\sqrt{21}}$$

Bài 3.4.3.

1) Cách 1: Thay phương trình của d vào phương trình của (α) ta có:

$$3(12 + 4t) + 4(9 + 3t) - 1 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow 23t + 69 = 0 \Leftrightarrow t = -3$$

Vậy d cắt (α) tại $A(0; 0; -2)$.

Cách 2: Ta có: $\vec{u} = (4; 3; 1)$ là VTCP của d , $\vec{n} = (3; 4; -1)$ là VTPT của (α)

Do $\vec{u} \cdot \vec{n} = 35 \neq 0$ nên d và (α) cắt nhau.

2) Cách 1: Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 2 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \\ y + 4z + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4z - 17 \\ 2x - 6z - 49 = 0 \\ x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ này vô nghiệm nên suy ra $d \parallel (\alpha)$.

Cách 2: Ta có: $\vec{u} = (-3; 4; -1)$ là VTCP của d , $\vec{n} = (0; 1; 4)$ là VTPT của (α)

Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và điểm $M(-10; 4; 1) \in d$ mà $M \notin (\alpha)$ suy ra $d \parallel (\alpha)$.

3) Ta có $\vec{u} = (8; 2; 3)$ là VTCP của d , $\vec{n} = (1; 2; -4)$ là VTPT của (α)

Do $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và điểm $N(13; 1; 4) \in d$ đồng thời $N \in (\alpha)$ nên suy ra $d \subset (\alpha)$.

Bài 3.4.4.

1) Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 6 + 2t = 4 + 4t' \\ -3 - 2t = -3t' \\ 1 - m + (m - 1)t = -2 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3, t' = -1 \\ 1 - m + (m - 1)(-3) = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Khi đó hai đường thẳng cắt nhau tại $A(0; 3; 4)$.

2) Cách 1:

Đường thẳng d_m đi qua $A(0; 1; -2)$ có

$\vec{u} = (-2m^2 + m + 1; -4m^2 - 4m - 1; m^2 - m)$ là VTCP. Mặt phẳng (P) có $\vec{n} = (2; -1; 0)$ là VTPT.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d_m \parallel (P) &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ A \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m^2 + 2m + 2 + 4m^2 + 4m + 1 = 0 \\ -1 + 2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có $d_m \parallel (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x = (-2m^2 + m + 1)t \\ y = 1 - (4m^2 + 4m + 1)t \\ z = -2 + (m^2 - m)t \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Thay ba phương trình đầu vào phương trình cuối ta được $(6m + 3)t = -1$

Do đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Bài 3.4.5.

1) Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -1)$ là VTCP của d

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

3) Ta có $\vec{n} = (1; 2; -2)$ là VTPT của (P)

Vì $d \perp (P)$ nên d nhận $\vec{n} = (1; 2; -2)$ làm VTCP

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}.$$

4) Đường thẳng Δ có $\vec{u} = (2; -2; -1)$ là VTCP

Vì $d \parallel \Delta$ nên d nhận $\vec{u} = (2; -2; -1)$ làm VTCP.

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+3}{-3}.$$

5) Để lập phương trình đường thẳng d ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $A(-1; -1; 1)$, $B(-5; 6; 4)$ là hai điểm chung của (α) và (β)

$\Rightarrow A, B \in d \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4; 7; 3)$ là một VTCP của d

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 + 7t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x+1}{-4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{3}.$$

Cách 2: Ta có $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$, $\vec{n}_2 = (2; -1; 5)$ lần lượt là VTPT của (α) , (β)

Vì d là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4; -7; -3)$

Từ đó ta lập được phương trình của d .

Cách 3: Ta có $M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\alpha) \\ M \in (\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Đặt $z = t$ ta được: $\begin{cases} x + y = -3 + t \\ 2x - y = 4 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}t \\ y = -\frac{10}{3} + \frac{7}{3}t \end{cases}$

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}t \\ y = -\frac{10}{3} + \frac{7}{3}t; z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Bài 3.4.6.

1) Ta có: d_1 có $\vec{u}_1 = (5; -8; -3)$ VTCP; d_2 có $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$ là VTCP

Cách 1: Giả sử $\vec{u} = (a; b; c)$ là một VTCP của Δ .

Vì Δ vuông góc với d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 8b - 3c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \frac{b}{3} \cdot (6; 3; 2)$$

Phương trình Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Cách 2. Vì $\Delta \perp d_1$, $\Delta \perp d_2$ nên $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-6; -3; -2)$ là một VTCP của Δ

Suy ra phương trình Δ là: $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2) Gọi d là giao tuyến của hai mp (P) và (Q)

Suy ra $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; 9; -24)$ là VTCP của d

Vì $\begin{cases} \Delta // (P) \\ \Delta // (Q) \end{cases} \Rightarrow \Delta // d \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d = (-1; 9; -24)$

Vậy phương trình của Δ : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + 9t \\ z = -2 - 24t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

- 3) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (P) với d_1, d_2 . Ta có :

$$A(1; 0; 0), B(6; -2; 1)$$

Vì Δ nằm trong (P) đồng thời Δ cắt d_1, d_2 nên Δ đi qua A, B

Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{AB} = (5; -2; 1)$ làm VTCP.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

- 4) Ta có d_1 đi qua $M_1(-1; -3; 2)$ và VTCP $\overrightarrow{u_1} = (3; -2; -1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(2; -1; 1)$ và VTCP $\overrightarrow{u_2} = (2; 3; -5)$

Gọi (P) là mp đi qua M và chứa đường thẳng d_1 .

Khi đó (P) có $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-4; 0; -12)$ là VTPT

Tương tự gọi (Q) là mp đi qua M và đường thẳng d_2 , suy ra

$\overrightarrow{n_Q} = (7; -13; -5)$ là VTPT của (Q).

Vì Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 nên Δ là giao tuyến của (P) và (Q)

suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = -52(3; 2; -1)$

Phương trình Δ :
$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.4.7.

- 1) Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(1 + 2t; -1 - 3t; 2 - t)$ nên $\overrightarrow{AM} = (2t - 3; -3t - 4; -t)$

Do đó $AM = \sqrt{105} \Leftrightarrow AM^2 = 105 \Leftrightarrow (2t - 3)^2 + (-3t - 4)^2 + t^2 = 105$

$\Leftrightarrow 7t^2 + 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{20}{7}$

Từ đó ta tìm được hai điểm $M(5; -7; 0)$ hoặc $M(-\frac{33}{7}; \frac{53}{7}; \frac{34}{7})$.

- 2) Gọi H là hình chiếu của A lên Δ , suy ra $H(1 + 2t; -1 - 3t; 2 - t)$,

$\overrightarrow{AH} = (2t - 3; -3t - 4; -t)$

Vì $AH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, trong đó $\overrightarrow{u} = (2; -3; -1)$ là VTCP của Δ

Do đó: $2(2t - 3) - 3(-3t - 4) - t = 0 \Leftrightarrow 14t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{7}$.

$$\text{Suy ra } H\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{17}{7}\right)$$

Vì H là trung điểm của AA' nên

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -\frac{26}{7} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -\frac{17}{7} \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = \frac{20}{7} \end{cases} \Rightarrow A' \left(-\frac{26}{7}; -\frac{17}{7}; \frac{20}{7} \right)$$

3) Ta có $D \in \Delta$ nên $D(1+2t; -1-3t; 2-t)$

$$\text{Suy ra } d(D, (\alpha)) = \frac{|(1+2t) + 2(1+3t) + 2(2-t) + 2|}{3} = |2t+3|$$

$$\text{Do đó } d(D, (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow |2t+3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow D(-1; 2; 3) \\ t = -2 \Rightarrow D(-3; 5; 4) \end{cases}$$

Bài 3.4.8.

1) Vì $B \in Oy \Rightarrow B(0; b; 0) \Rightarrow OB = 2OA \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

$$\bullet b = 6 \Rightarrow \overline{AB} = (2; 4; -1) \text{ nên phương trình } \Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-6}{4} = \frac{z}{-1}$$

$$\bullet b = -6 \Rightarrow \overline{AB} = (2; -8; -1) \text{ nên phương trình } \Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+6}{-8} = \frac{z}{-1}$$

2) Ta có $C(2+t; 3-2t; -1+t) \Rightarrow \overline{OC} = (2+t; 3-2t; -1+t), \overline{OB} = (1; 1; 2)$

$$\text{Suy ra } [\overline{OB}, \overline{OC}] = (5t-7; t+5; 1-3t) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \|\overline{OB}, \overline{OC}\|$$

$$\text{Do đó } \|\overline{OB}, \overline{OC}\| = \sqrt{83} \Leftrightarrow (5t-7)^2 + (t+5)^2 + (1-3t)^2 = 83$$

$$\Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{4}{35}$$

$$\bullet t = 2 \Rightarrow C(4; -1; 1) \Rightarrow \overline{BC} = (3; -2; -1), \text{ phương trình}$$

$$\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\bullet t = -\frac{4}{35} \Rightarrow C\left(\frac{66}{35}; \frac{113}{35}; -\frac{39}{35}\right) \Rightarrow \overline{BC} = \left(\frac{31}{35}; \frac{78}{35}; -\frac{109}{35}\right),$$

$$\text{phương trình } \Delta: \frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{78} = \frac{z-2}{-109}$$

Bài 3.4.9.

1) Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(1; -1; 3)$ có $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(2; 3; -9)$ có $\vec{u}_2 = (3; 2; -2)$ là VTCP

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (-1; -4; 12), [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; -1; -4) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_2M_1} = -42 \neq 0$$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng

$$\text{là: } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_2M_1}|}{\|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]\|} = \frac{42}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{21}.$$

2) Gọi H là hình chiếu của C lên đường thẳng Δ_1 , khi đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = CH$$

Do đó tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CH nhỏ nhất

Hay CH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 .

Ta có: $C(1+t; -1+2t; 3-t), H(2+3t'; 3+2t'; -9-2t')$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HC} = (t-3t'-1; 2t-2t'-4; -t+2t'+12)$$

$$\text{Mà } \begin{cases} HC \perp \Delta_1 \\ HC \perp \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{HC} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-3t'=7 \\ 9t-17t'=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t'=-1 \end{cases}$$

Vậy $C(3; 3; 1)$ là điểm cần tìm.

3) Vì $M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$ nên suy ra

$$M(1+a; -1+2a; 3-a), N(2+3b; 3+2b; -9-2b)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (a-3b-1; 2a-2b-4; -a+2b+12)$$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} MN^2 = (a-3b-1)^2 + (2a-2b-4)^2 + (a-2b-12)^2 = 180 \\ \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{NM} \cdot \vec{u}_1|}{\|\overrightarrow{NM}\| \cdot \|\vec{u}_1\|} = \frac{|3(2a-3b-7)|}{6\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{8}{15}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-3b-1)^2 + (2a-2b-4)^2 + (a-2b-12)^2 = 180 & (1) \\ |2a-3b-7| = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b - 7 = 4 \\ 2a - 3b - 7 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3b+11}{2} \\ a = \frac{3b+3}{2} \end{cases}$$

• $a = \frac{3b+11}{2}$ thay vào (1) ta có được:

$$\frac{(3b-9)^2}{4} + (b+7)^2 + \frac{(b+13)^2}{4} = 180 \Leftrightarrow 14b^2 + 28b - 274 = 0$$

Bài 3.4.10.

1) Đường thẳng Δ có $\vec{u}_{\Delta} = (2; -1; 2)$ là VTCP

Cách 1: Vì $H \in \Delta$ nên $H(1+2t; -1-t; 2t) \Rightarrow \vec{AH} = (2t; 1-t; 2t+5)$.

Điểm H là hình chiếu của A trên Δ nên $\vec{AH} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$, hay

$$2 \cdot (2t) - 1 \cdot (1-t) + 2(2t+5) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; -2).$$

Vậy điểm cần tìm là $H(-1; 0; -2)$.

Cách 2: Gọi (α) là mặt phẳng qua $A(1; -2; -5)$ và vuông góc với Δ .

Ta có một véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_{\alpha} = (2; -1; 2)$ nên

$$(\alpha): 2x - y + 2z - 6 = 0.$$

Điểm H là hình chiếu của A trên Δ thì $H = (P) \cap \Delta \Rightarrow H(-1; 0; -2)$.

2) Gọi $A'(x; y; z)$.

Vì ba điểm A, A', H thẳng hàng và $AA' = 2AH$ nên có hai trường hợp

• $\vec{AA'} = 2\vec{AH}$, khi đó H là trung điểm AA' nên

$$\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \\ z_A + z_{A'} = 2z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 1 \end{cases}$$

Vậy $A'(-3; 2; 1)$.

• $\vec{AA'} = -2\vec{AH}$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_{A'} - 1 = -2 \cdot (-2) \\ y_{A'} + 2 = -2 \cdot 2 \\ z_{A'} + 5 = -2 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 5 \\ y_{A'} = -6 \\ z_{A'} = -11 \end{cases} \Rightarrow A'(5; -6; -11).$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $A'(-3; 2; 1)$ hoặc $A'(5; -6; -11)$.

3) Gọi d là đường thẳng đi qua $B(1; -1; 2)$ và $d \perp (P)$, khi đó một véc tơ chỉ phương của d là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2; -1; 2)$ nên $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Điểm K là hình chiếu của B trên (P) thì $K = d \cap (P)$, nên tọa độ K là

ng nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2} \\ 2x - y + 2z = 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-3; 1; -2).$$

Điểm B' đối xứng với B qua (P) khi H là trung điểm của BB' nên tọa độ điểm B' cần tìm B'(-7; 3; -6).

Bài 3.4.11.

1) Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(1; -1; 0)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(3; 0; -1)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (-1; 2; 1)$.

Hệ phương trình tương giao của Δ_1 và Δ_2 là:

$$\begin{cases} 1 + 2t_1 = 3 - t_2 \\ -1 + t_1 = 2t_2 \\ -t_1 = -1 + t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 - 2t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Do đó hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $I(3; 0; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}] = (3; -1; 5)$ nên phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là $3x - y + 5z - 4 = 0$.

2) Vì $M \in \Delta_1$ nên $M(1 + 2t; -1 + t; -t)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_2M}(2t - 2; -1 + t; 1 - t)$, $[\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}] = (3t - 3; 1 - t; 5t - 5)$.

Do đó $d(M, \Delta_2) = \frac{\|\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\|}{\|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\|}$

$$= \frac{\sqrt{(3t-3)^2 + (1-t)^2 + (5t-5)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = |t-1| \sqrt{\frac{35}{6}}.$$

Theo giả thiết ta có $|t-1| \sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{\sqrt{210}}{3} \Leftrightarrow |t-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$

Từ đó ta có tọa độ điểm M cần tìm là $M(7; 2; -3)$ hoặc $M(-1; -2; 1)$.

3) Hai đường thẳng cắt nhau tại $I(3; 0; -1)$.

Xét hai điểm thuộc hai đường thẳng là $A(1; -1; 0)$, $B(2; 2; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(-2; -1; 1), |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{6}$ và $\overrightarrow{IB}(-1; 2; 1), |\overrightarrow{IB}| = \sqrt{6}$ nên véc tơ đơn vị của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là:

$$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{IA}}{|\overrightarrow{IA}|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{IB}}{|\overrightarrow{IB}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng là đường thẳng qua I và có véc tơ chỉ phương là $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-3; 1; 2)$,

$$\text{hoặc } \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{3}{\sqrt{6}}; 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1; 3; 0).$$

Vậy phương trình tham số của các đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bài 3.4.12. Đường thẳng d có $\vec{u} = (2; 3; -4)$ là VTCP

1) Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d, suy ra

$$H(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t) \\ \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t - 6; 3t - 6; -4t + 7)$$

$$\text{Vì } AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2t - 6) + 3(3t - 6) + 4(4t - 7) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow H(3; 5; -1)$$

Do H là trung điểm của AA' nên A'(1; 5; -2).

2) Vì tam giác ABC vuông tại C nên $AC \perp d \Rightarrow C \equiv H$ hay C(3; 5; -1)

$$B \in d \Rightarrow B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = (2t - 4; 3t - 6; -4t + 8)$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{29} \Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (3t - 6)^2 + (-4t + 8)^2 = 29 \Leftrightarrow t = 3, t = 1$$

Suy ra B(1; 2; 3) hoặc B(5; 8; -5).

Bài 3.4.13. Ta có Δ cắt (P) tại I(1; 1; 1).

$$\text{Điểm } M(x; y; 3 - x - y) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (1 - x; 1 - y; x + y - 2)$$

Đường thẳng Δ có $\vec{a} = (1; -2; -1)$ là VTCP

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MI} \cdot \vec{a} = 0 \\ MI^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (1 - x)^2 + (1 - y)^2 + (-2 + x + y)^2 = 16.14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M(-3; -7; 13)$ và $M(5; 9; -11)$.

Bài 3.4.14. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-2 + t; 1 + 3t; -5 - 2t)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$, $\overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6 - 2t)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (t + 12; -t - 6; -t)$$

$$\text{Do đó: } S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\| = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(t + 12)^2 + (-t - 6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -12.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M(-2; 1; -5)$ và $M(-14; -35; 19)$.

Bài 3.4.15. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-2 + t; 1 + 3t; -5 - 2t)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$, $\overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6 - 2t)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (t + 12; -t - 6; -t)$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\| = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(t + 12)^2 + (-t - 6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -12.$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-2; 1; -5)$ và $M(-14; -35; 19)$.

Bài 3.4.16. Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với Ox

Suy ra $M(m; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (m - 1; -2; -3)$, đường thẳng Δ có

$\vec{a} = (2; 1; -2)$ là VTCP

Vì $AM \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}$.

Bài 3.4.17. Vì $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0; 0)$

Đường thẳng Δ đi qua $N(0; 1; 0)$ có $\vec{u} = (2; 1; 2)$ là VTCP nên

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{NM}, \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3}$$

$$\text{Nên } d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3} = |m|$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 2.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(-1; 0; 0)$, $M_2(2; 0; 0)$.

Bài 3.4.18. Đường thẳng Δ_2 qua $A(2; 1; 0)$ có $\vec{u} = (2; 1; 2)$ VTCP

$$\text{Vì } M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t; t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t+1; t-1; t).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (t-2; -2; 3-t)$$

$$\text{Nên } d(M, \Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-2)^2 + (3-t)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow M(4; 1; 1) \\ t=4 \Rightarrow M(7; 4; 4) \end{cases}$$

Bài 3.4.19. Giả sử $M(a; b; c)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Vì } M \in \Delta_1 \Rightarrow \frac{a+1}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c+9}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ c = 6b-9 \end{cases}$$

Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d = d(M; (P)) = \frac{|a - 2b + 2c - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11b - 20|}{3}.$$

Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2 , ta có:

$$\text{Suy ra } (Q): 2(x-a) + 1(y-b) - 2(z-c) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0$$

Gọi H là giao điểm của (Q) và Δ_2 , suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2} \end{cases} \Rightarrow H(-2b+3; -b+4; 2b-3)$$

$$\text{Do đó } MH^2 = (3b-4)^2 + (2b-4)^2 + (4b-6)^2 = 29b^2 - 88b + 68$$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$MH^2 = d^2 \Leftrightarrow 29b^2 - 88b + 68 = \frac{(11b-20)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 261b^2 - 792b + 612 = 121b^2 - 440b + 400$$

$$\Leftrightarrow 140b^2 - 352b + 212 = 0 \Leftrightarrow 35b^2 - 88b + 53 = 0 \Rightarrow b = \frac{53}{35}.$$

$$\text{Vậy có 2 điểm thỏa mãn là: } M(0; 1; -3) \text{ và } M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right).$$

Bài 3.4.20. Tọa độ điểm I của Δ với (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow I(-3; 1; 1) \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases}$$

Ta có $\vec{n} = (1; 2; -3)$ là VTPT của (P); $\vec{u} = (1; 1; -1)$ là VTCP của Δ .

Đường thẳng d cần tìm qua I và có $\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1; -2; -1)$ là VTCP.

$$\text{Phương trình d: } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.4.21.

1) Ta có $A \in d_1 \Rightarrow A(1+a; -1+2a; 1-a)$,

$$B \in d_3 \Rightarrow B(-2b; -1-4b; -1+2b)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-a-2b-1; -2(a+2b); a+2b-2)$, đặt $x = a+2b$

$$\text{Từ } AB = \sqrt{13} \Rightarrow (x+1)^2 + 4x^2 + (x-2)^2 = 13 \Leftrightarrow x = -1, x = \frac{4}{3}$$

• Với $x = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0; 2; -3)$, ta có $\vec{u} = (2; 3; -1)$ là VTCP của d_2 và $A(-1; 1; 0) \in d_2 \Rightarrow A \in (\alpha)$

Suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}] = (7; -6; -4)$ là VTPT của (α) .

$$\text{Phương trình } (\alpha): 7x - 6y - 4z + 13 = 0.$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Suy ra $\vec{n} = [-3\overrightarrow{AB}, \vec{u}] = (-14; 11; 5)$ là VTPT của (α) .

$$\text{Phương trình } (\alpha): 14x - 11y - 5z - 25 = 0.$$

2) Đường thẳng d_1 đi qua $M(1; -1; 1)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $E(-1; 1; 0)$, có VTCP $\vec{u}_2 = (2; 3; -1)$

Đường thẳng d_3 đi qua $N(0; -1; -1)$ và có VTCP $\vec{u}_3 = (-2; -4; 2)$

Ta có $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 \Rightarrow d_1 \parallel d_3$. Do đó $\vec{n}_P = \vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{MN} = (-4; 3; 2)$

Vì mặt phẳng (Q) đi qua d_2 nên phương trình (Q) có dạng:

$$ax + by + cz + a - b = 0 \quad (1)$$

$$\text{với } a^2 + b^2 + c^2 > 0 \text{ và } 2a + 3b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 3b.$$

$$\text{Mặt khác } \cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}| \cdot |\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{|4a - 3b - 2c|}{\sqrt{29(a^2 + b^2 + c^2)}} \\ = \frac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2 + 12ab + 10b^2)}}$$

$$\text{Nên ta có: } \frac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2 + 12ab + 10b^2)}} = \frac{6}{\sqrt{145}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}|b| = 2\sqrt{5a^2 + 12ab + 10b^2} \Leftrightarrow 20a^2 + 48ab - 5b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10}b \\ a = -\frac{5}{2}b \end{cases}$$

$$\bullet a = \frac{1}{10}b \text{ ta chọn } b = 10 \Rightarrow a = 1, c = 32.$$

Phương trình (Q) là: $x + 10y + 32z - 9 = 0$.

$$\bullet a = -\frac{5}{2}b \text{ ta chọn } b = -2 \Rightarrow a = 5, c = 4.$$

Phương trình (Q) là: $5x - 2y + 4z + 7 = 0$.

Bài 3.4.22.

1) Giả sử (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại

$$A\left(\frac{1}{a}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{1}{b}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{1}{c}\right) \text{ với } a, b, c > 0$$

Khi đó, phương trình (α) : $ax + by + cz = 1$

Vì (α) đi qua M và song song với Δ nên ta có:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b + 1 \\ c = -2b + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } V_{OABC} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = 8 \Leftrightarrow abc = \frac{1}{48}$$

$$\Leftrightarrow b(2b - 1)\left(2b - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{48} \Leftrightarrow 192b^3 - 160b^2 + 32b - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4b-1)(48b^2-28b+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6} \\ b = \frac{7+\sqrt{37}}{24} \Rightarrow a = \frac{5-\sqrt{37}}{12}, c = \frac{1-\sqrt{37}}{12} \\ b = \frac{7-\sqrt{37}}{24} \Rightarrow a = \frac{5+\sqrt{37}}{12}, c = \frac{1+\sqrt{37}}{12} \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu lập là: $(\alpha_1): 6x + 3y + 2z - 12 = 0$;

$$(\alpha_2): 2(5-\sqrt{37})x + (7+\sqrt{37})y + 2(1-\sqrt{37})z - 24 = 0$$

$$\text{Và } (\alpha_3): 2(5+\sqrt{37})x + (7-\sqrt{37})y + 2(1+\sqrt{37})z - 24 = 0.$$

2) Vì mặt phẳng (β) đi qua M nên phương trình của (β) có dạng:

$$a(x-1) + b(y-2) + cz = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b = 0 (*)$$

với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Mặt khác, $(\beta) \perp (P)$ nên $\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin \varphi &= \left| \sin(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{n}_\beta|} \\ &= \frac{|-2a + 2b + 3c|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|5a + b|}{\sqrt{34(a^2 + ab + b^2)}} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{3}{34}} \text{ nên ta có: } \frac{|5a + b|}{\sqrt{34(a^2 + ab + b^2)}} = \sqrt{\frac{3}{34}}$$

$$\Leftrightarrow (5a + b)^2 = 3(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow 22a^2 + 7ab - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{11}b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{cases}$$

• $a = \frac{2}{11}b$, ta chọn $b = 11 \Rightarrow a = 2, c = -13$ nên phương trình của (β) là:

$$2x + 11y - 13z - 24 = 0.$$

• $a = -\frac{1}{2}b$, ta chọn $b = -2 \Rightarrow a = 1, c = 1$ nên phương trình của (β) là:

$$x - 2y + z + 3 = 0 = 0.$$

Bài 3.4.23.

- 1) Ta có đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2; -1; -2)$, đường thẳng d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-2; 1; 2)$ và đường thẳng d_3 có VTCP $\vec{u}_3 = (1; 1; 1)$.

$$C \in d_1 \Rightarrow C(2c; -c; 1 - 2c), D \in d_2 \Rightarrow D(1 - 2d; -1 + d; -2 + 2d)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-2x + 1; x - 1; 2x - 3), x = d + c$$

$$\text{Suy ra } CD = \sqrt{38} \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (x - 1)^2 + (2x - 3)^2 = 38$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3$$

$$\bullet x = -1 \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (3; -2; -5), \overrightarrow{AB} = (-2; -2; -1)$$

$$\text{Suy ra } \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (8; -13; 10)$$

$$\text{Phương trình } (\alpha): 8x - 13y + 10z - 12 = 0$$

$$\bullet x = 3 \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (-5; 2; 3). \text{ Suy ra } \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (-4; 11; -14)$$

$$\text{Phương trình } (\alpha): 4x - 11y + 14z - 24 = 0.$$

- 2) Vì (3) song song với hai đường thẳng d_1, d_3 nên ta có

$$\vec{n}_\beta = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = (1; -4; 3)$$

$$\text{Phương trình } (\beta) \text{ có dạng: } x - 4y + 3z + m = 0$$

$$\text{Lấy } E(0; 0; 1) \in d_1, F(-1; 0; -1) \in d_3$$

Vì (3) cách đều hai đường thẳng d_1, d_3 nên ta có:

$$d(E, (\beta)) = d(F, (\beta)) \Leftrightarrow |m + 3| = |m - 4| \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình } (\beta): x - 4y + 3z + \frac{1}{2} = 0.$$

- 3) Ta có $M(1 - 2m; -1 + m; -2 + 2m), N(-1 + n; n; -1 + n)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = (n + 2m - 2; n - m + 1; n - 2m + 1)$$

$$\text{Do } MN \parallel (Q) \text{ nên } \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_Q = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(n + 2m - 2) + (n - m + 1) + (n - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 2 - 4n$$

Mặt khác:

$$MN = \sqrt{14} \Leftrightarrow (n + 2m - 2)^2 + (n - m + 1)^2 + (n - 2m + 1)^2 = 14$$

$$\Leftrightarrow 155n^2 - 92n = 0 \Leftrightarrow n = 0, n = \frac{92}{155}.$$

$$\text{Do } x_N < -\frac{1}{2} \text{ nên ta có } n = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow M(-3; 1; 2), N(-1; 0; -1)$$

$$\text{Suy ra } \vec{n}_P = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = (-1; -5; 1)$$

$$\text{Phương trình } (P): x + 5y - z = 0.$$

Bài 3.4.24.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -3; 1)$, bán kính $R = \sqrt{42}$

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(-5; 1; -13)$, VTCP $\vec{u}_1 = (2; -3; 2)$

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-7; -1; 8)$, VTCP $\vec{u}_2 = (3; -2; 1)$

- 1) Vì mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên ta có:

$$\vec{n}_P = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1; 4; 5)$$

Suy ra phương trình (P) có dạng: $x + 4y + 5z + m = 0$

Mặt khác, (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = R$.

$$\Leftrightarrow \frac{|m - 5|}{\sqrt{42}} = \sqrt{42} \Leftrightarrow |m - 5| = 42 \Leftrightarrow m = 47, m = -37$$

Vậy phương trình (P) là: $x + 4y + 5z - 37 = 0$ hoặc $x + 4y + 5z + 47 = 0$.

- 2) Vì mặt phẳng (α) chứa d_1 nên phương trình (α) có dạng

$$a(x + 5) + b(y - 1) + c(z + 13) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + 5a - b + 13c = 0$$

$$\text{Với } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ và } 2a - 3b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2a + 2c}{3}$$

$$\text{Ta có: } \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{7}}, \text{ suy ra } \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{u}_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{|3a - 2b + c|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow \left| 3a - 2 \cdot \frac{2a + 2c}{3} + c \right| = \sqrt{2 \left[a^2 + \left(\frac{2a + 2c}{3} \right)^2 + c^2 \right]}$$

$$\Leftrightarrow (5a - c)^2 = 2(13a^2 + 8ac + 13c^2) \Leftrightarrow a^2 + 26ab + 25c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -c, a = -25c.$$

- $a = -c$, chọn $c = -1, a = 1, b = 0$. Phương trình (α): $x - z - 8 = 0$

- $a = -25c$, chọn $c = -1, a = 25, b = 16$.

Phương trình (α): $25x + 16y - z + 96 = 0$.

- 3) Vì (β) chứa d_2 nên phương trình có dạng:

$$ax + by + cz + 7a + b - 8c = 0$$

$$\text{Với } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ và } 3a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 3a$$

Theo giả thiết bài toán, ta có: $d(I, (\beta)) = \sqrt{42 - \frac{124}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{|9a - 2b - 7c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 3|30a - 16b| = \sqrt{6(10a^2 - 12ab + 5b^2)}$$

$$\Leftrightarrow 3(15a - 8b)^2 = 2(10a^2 - 12ab + 5b^2) \Leftrightarrow 1340a^2 - 1428ab + 379b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{379}{670}b, a = \frac{1}{2}b.$$

$$\bullet a = \frac{1}{2}b, \text{ chọn } b = 2, a = 1, c = 1.$$

Phương trình mặt phẳng (β) là: $x + 2y + z + 1 = 0$.

$$\bullet a = \frac{379}{670}b, \text{ chọn } b = 670, a = 379, c = 203.$$

Phương trình (β) là: $379x + 670y + 203z + 1699 = 0$.

Bài 3.4.25.

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(0; 1; 0)$, VTCP $\vec{u}_1 = (1; -1; 1)$

Δ_2 đi qua $M_2(-3; -5; 4)$, VTCP $\vec{u}_2 = (3; -1; -1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; -6; 4)$, $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (2; 4; 2)$

$$\Rightarrow (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -26 \neq 0$$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 với $M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$

Suy ra $M(m; 1-m; m)$, $N(-4+3n; -5-n; 4-n)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3n-m-4; -n+m-6; -n-m+4)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-m+2=0 \\ 11n-3m-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ m=4 \end{cases}$$

Suy ra $M(4; -3; 4)$, $N(2; -7; 2)$, $\overrightarrow{MN} = (-2; -4; -2)$.

$$\text{Phương trình MN: } \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1}.$$

2) Gọi H là hình chiếu của C lên AB, suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = 2CH$

Ta có $CH \geq MN$ nên $S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $C \equiv N$ hay $C(2; -7; 2)$.

3) Giả sử tồn tại tứ diện đều EFIJ với $E, F \in \Delta_1$ và $I, J \in \Delta_2$

Đặt $EF = 2x$, ta có M, N lần lượt là trung điểm của EF và IJ

Trong tam giác EMN ta có:

$$EN^2 - EM^2 = MN^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x^2 = 24 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$$

Gọi $E(t; 1-t; t) \Rightarrow \overrightarrow{ME} = (t-4; 4-t; t-4)$.

Do đó $ME = x \Leftrightarrow 3(t-4)^2 = 12 \Leftrightarrow x = 6, x = 2$

Suy ra $E(6; -5; 6), F(2; -1; 2)$

Tương tự: $I(-4+3t'; -5-t'; 4-t') \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (3t'-6; -t'+2; -t'+2)$

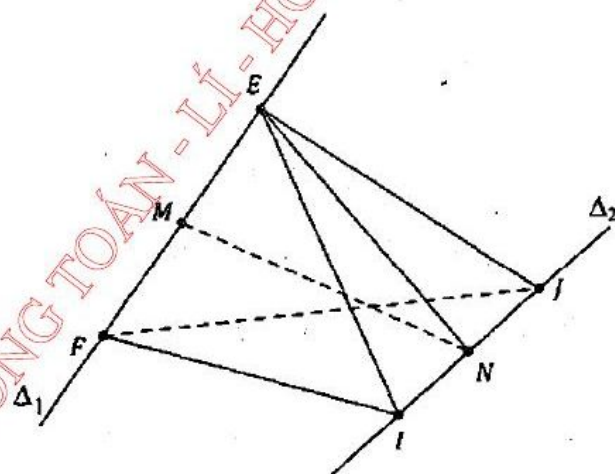
Do đó $NI = x \Leftrightarrow 11(t'-2)^2 = 12 \Leftrightarrow t' = 2 \pm \frac{2\sqrt{33}}{11}$

Suy ra $I\left(2 + \frac{6\sqrt{33}}{11}; -7 - \frac{2\sqrt{33}}{11}; 2 - \frac{2\sqrt{33}}{11}\right)$,

$J\left(2 - \frac{6\sqrt{33}}{11}; -7 + \frac{2\sqrt{33}}{11}; 2 + \frac{2\sqrt{33}}{11}\right)$

Ta có: $IF = 2\sqrt{12 + \frac{6\sqrt{33}}{11}} \neq EF = 4\sqrt{3}$.

Vậy không tồn tại tứ diện đều EFIJ.



4) Ta có: $K(a; 1-a; a)$, $H(-4+3b; -5-b; 4-b)$

Suy ra $\overrightarrow{PK} = (a-1; -a-3; a-5)$, $\overrightarrow{PH} = (3b-5; -b-9; -b-1)$

Vì P, H, K nằm trên một đường thẳng và $PH = 2PK$ nên ta có các trường hợp sau

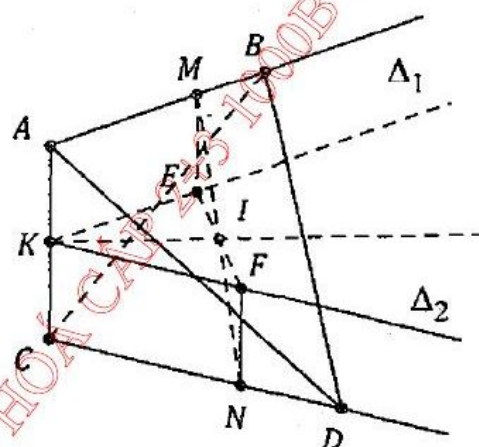
$$\bullet \overrightarrow{PH} = 2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = 2a-2 \\ -b-9 = -2a-6 \\ -b-1 = 2a-10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3$$

Suy ra $\overrightarrow{PK} = (2; -6; -2)$

Phương trình d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{-1}$

$$\bullet \overrightarrow{PH} = -2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = -2a+2 \\ -b-9 = 2a+6 \\ -b-1 = -2a+10 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Bài 3.4.26.



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-6; 4; 2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6; 0; -6)$, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{CD} = -48 \neq 0$

Do đó AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Hơn nữa $\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ nên AC là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AC, suy ra $K\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$; Δ_1 là đường thẳng đi qua K và song song với AB; Δ_2 là đường thẳng đi qua K và song song với CD.

Gọi E là hình chiếu của M lên Δ_1 , F là hình chiếu của N lên Δ_2

Khi đó MENF là hình bình hành nên I là trung điểm của EF.

Đồng thời $KE = AM = CN = KF$ nên KI là đường phân giác Δ của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 . Mà Δ cố định nên I luôn nằm trên đường thẳng cố định Δ .

$$\text{Đặt } \vec{e}_1 = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{CD} \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}} \right).$$

Vì Δ là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên ta có hai trường hợp sau:

$$\bullet \vec{u}_\Delta = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\text{Phương trình } \Delta : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{14}} \right) t \\ y = \frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{14}} \right) t \\ z = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{14}} \right) t \end{cases}$$

$$\bullet \vec{u}_\Delta = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\text{Phương trình } \Delta : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \right) t \\ y = \frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{14}} \right) t \\ z = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \right) t \end{cases}$$

Chuyên đề 5. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

5.1. Phương pháp giải

1) Lập phương trình mặt cầu:

- Để lập phương trình mặt cầu ta cần tìm tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó phương trình mặt cầu có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (1)$$

- Ngoài ra để lập phương trình mặt cầu ta có thể tìm các hệ số a, b, c, d trong phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$

Với tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

- Một mặt cầu được hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

2) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu tâm I , bán kính R và mặt phẳng (α) , $h = d(I, (\alpha))$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α) .

- $h > R$ thì (α) và mặt cầu (I) không giao nhau
- $h = R$ thì (α) và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H
- $h < R$ thì (α) và mặt cầu (I) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn

tâm H , bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

3) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ , $h = d(I, \Delta)$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng Δ .

- $h > R$ thì Δ và mặt cầu (I) không giao nhau
- $h = R$ thì Δ và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H . Hay Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (I) .
- $h < R$ thì Δ và mặt cầu (I) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và

H là trung điểm của dây cung AB , do đó: $R^2 = \frac{AB^2}{4} + h^2$.

5.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.5.1. Lập phương trình mặt cầu (S) biết

- 1) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính $R = \sqrt{5}$
- 2) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$, $B(3; 1; -2)$
- 3) Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với
mp(P): $2x - y + 2z + 4 = 0$.

- 4) Mặt cầu (S) đi qua $C(2; -4; 3)$ và các hình chiếu của C lên ba trục tọa độ.
 5) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên mp(Oxy) và đi qua $M(1; 0; 2)$, $N(-2; 1; 1)$, và $P(-1; -1; 1)$.

Lời giải.

1) Phương trình mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

2) Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I \in Ox \Rightarrow I(x; 0; 0)$

Ta có $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2^2 + 1^2 = (x-3)^2 + 1^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow x = 2$

Suy ra tâm $I(2; 0; 0)$ và bán kính $R^2 = IB^2 = 6$

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 6$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với mp(P)

Suy ra $R = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 + 2 \cdot 4 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{20}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \frac{400}{9}$.

4) Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là hình chiếu của C lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz

Suy ra $C_1(2; 0; 0)$, $C_2(0; -4; 0)$, $C_3(0; 0; 3)$.

Giả sử (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do (S) đi qua C, C_1, C_2, C_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -4a + 8b - 6c + d = -29 \\ -4a + d = -4 \\ 8b + d = -16 \\ -6c + d = -9 \\ -2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{d+4}{4} \\ b = -\frac{d+16}{8} \\ c = \frac{d+9}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z = 0$.

5) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oxy) nên $I(x; y; 0)$

Ta có: $\begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IN^2 = IP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{10}; \frac{4}{5}; 0\right)$.

Và $R^2 = IM^2 = \frac{109}{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + z^2 = \frac{109}{20}$.

Ví dụ 3.5.2. Lập phương trình mặt cầu S(I, R) biết

- 1) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1) : 3x + 2y + z - 6 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha_2) : 2x + 3y + z = 0$
- 2) Mặt cầu có tâm I(1; 3; 5) và cắt $\Delta' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 12$
- 3) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng d : $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2}$, đi qua M(1; 1; 4) và tiếp xúc với d' : $\frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-4}$.

Lời giải.

- 1) Vì tâm $I \in \Delta$ nên $I(-2+t; 1+2t; -1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên:

$$d(I, (\alpha_1)) = d(I, (\alpha_2)) = R$$

$$\text{Suy ra } \frac{|3(-2+t) + 2(1+2t) - 1 - 2t - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2(-2+t) + 3(1+2t) - 1 - 2t|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow |5t - 11| = |6t - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 5t - 11 = 6t - 2 \\ 5t - 11 = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = \frac{3}{11} \end{cases}$$

- Nếu $t = \frac{3}{11}$ thì $I(-\frac{9}{11}; \frac{37}{11}; -\frac{37}{11})$, $R = \frac{4\sqrt{14}}{11}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x + \frac{9}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{11}\right)^2 + \left(z + \frac{37}{11}\right)^2 = \frac{224}{121}$$

- Nếu $t = -9$ thì $I(-11; -17; 17)$, $R = \frac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x + 11)^2 + (y + 17)^2 + (z - 17)^2 = \frac{4225}{14}$$

- 2) Đường thẳng Δ' qua điểm M(2; -3; 0) và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1; 1; 1)$.

Ta có $\vec{IM}(1; 6; 5)$ nên $[\vec{IM}, \vec{u}_{\Delta'}] = (1; -4; 5)$, do đó

$$d(I, \Delta') = \frac{\|\overline{IM}, \vec{u}_{\Delta'}\|}{|\vec{u}_{\Delta'}|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 5^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu được xác

$$\text{định theo công thức: } R^2 = d^2(I, \Delta') + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 14 + 36 = 50.$$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 50.$$

- g) Đường thẳng d' qua điểm $N(-2; -2; 4)$ và có $\vec{u}_{d'} = (1; 1; -4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I \in d'$ nên $I(2+t; -t; 3+2t)$

Ta có $\overline{MI} = (t+1; -t-1; 2t-1)$, $\overline{NI} = (4+t; 2-t; -1+2t)$ nên

$$[\overline{NI}, \vec{u}_{d'}] = (2t-7; 6t+15; 2t+2).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI = d(I, d') = R$.

$$\text{Do đó } MI = \frac{\|\overline{NI}, \vec{u}_{d'}\|}{|\vec{u}_{d'}|}, \text{ hay}$$

$$\sqrt{(2t-1)^2 + 2(1+t)^2} = \frac{\sqrt{(2t-7)^2 + (6t+15)^2 + (2t+2)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18(6t^2 + 3) = 44t^2 + 160t + 278 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{7}{2} \end{cases}$$

- Với $t = -1$ thì $I(1; 1; 1)$, $R = 9$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

- Với $t = \frac{7}{2}$ thì $I\left(\frac{11}{2}; -\frac{7}{2}; 10\right)$, $R = \frac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + (z-10)^2 = \frac{153}{2}.$$

Ví dụ 3.5.3. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + m = 0$. Tìm m sao cho

- 1) Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$.
- 2) Mặt cầu cắt mặt phẳng (Q): $2x - y - 2z + 1 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 4π .
- 3) Mặt cầu cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB vuông (I là tâm mặt cầu).

Lời giải.

Điều kiện tồn tại mặt cầu $14 - m > 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{14 - m}$.

- 1) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là

$$d(I; (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 4$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên $R = 4 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -2$.

- 2) Ta có $d(I; (Q)) = \frac{|-2 - 2 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1$.

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là 4π nên có bán kính $r = 2$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$$R^2 = r^2 + d^2(I; (Q)) \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow 14 - m = 5 \Leftrightarrow m = 9.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 9$.

- 3) Gọi $H(-1 - t; 2t; 2 - t)$ là hình chiếu của $I(-1; 2; -3)$ trên Δ .

Ta có $\overrightarrow{IH}(-t; 2t - 2; 5 - t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}(-1; 2; -2)$ nên

$$\overrightarrow{IH} \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow t + 4t - 4 - 10 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Vậy $\overrightarrow{IH}(-2; 2; 3) \Rightarrow IH = \sqrt{17}$.

Do tam giác IAB cân tại I nên vuông cân tại I, do đó tam giác IHA cũng vuông cân tại H, vì thế

$$R = IA = \sqrt{2} \cdot IH = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{14 - m} = \sqrt{34} \Rightarrow m = -20.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -20$.

Ví dụ 3.5.4. Cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y + z + 7 = 0$.

- 1) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó.

2) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(3; 5; -2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 5$.

$$1) \text{ Ta có } d(I, (\alpha)) = \frac{|2 + 2 + 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 4 < R, \text{ suy ra } (\alpha) \text{ cắt mặt cầu (S)}$$

theo đường tròn tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))} = 3$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α) , suy ra phương trình của HI

$$\text{là: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \\ 2x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tâm H} \left(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3} \right).$$

$$2) \text{ Ta có } \overline{AB} = (2; 6; -4) \text{ nên phương trình đường thẳng AB: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Vì $IA < R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{25 - d^2(I, (P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có

$IH \leq IK$ nên suy ra $d(I, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

$$\text{Do } H \in \overline{AB} \Rightarrow H(1 + t; -1 + 3t; 2 - 2t) \Rightarrow \overline{IH} = (t; 3t - 2; 1 - 2t)$$

$$\text{Vì } IH \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{IH} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow t + 3(3t - 2) - 2(1 - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow \overline{IH} = \left(\frac{4}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7} \right)$$

Vậy phương trình $(\alpha): 4x - 2y - z - 4 = 0$.

Ví dụ 3.5.5. Trong không gian cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_1 = (2; -2; -1)$, $\vec{n}_2 = (1; 2; -2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra $\vec{u} = \frac{1}{3}[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 1; 2)$ là VTCP của đường thẳng d

Hơn nữa điểm $A(6; 4; 5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A \in d$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ với $m < 13$.

$$\overline{IA} = (8; 1; 5) \Rightarrow [\overline{IA}, \vec{u}] = (-3; -6; 6) \Rightarrow d(I, d) = 3$$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 4$ và $IH = 3$

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2 = IH^2 + AH^2 \Leftrightarrow R^2 = 9 + 16$
 $\Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$.

Vậy $m = -12$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.5.6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng

$(P): 2x + 2y + z - m^2 + 3m = 0$ và mặt cầu

$(S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Với m vừa tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I , vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|m^2 + 3m - 1|}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \text{ VN} \end{cases} \Leftrightarrow m = -5, m = 2.$$

Khi đó (P) : $2x + 2y + z - 10 = 0$. Tọa độ tiếp điểm A là nghiệm của

$$\text{hệ: } \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \\ 2x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}, \text{ giải hệ này ta được}$$

$$x = 3, y = 1, z = 2 \Rightarrow A(3; 1; 2).$$

Ví dụ 3.5.7. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng (P) : $2x + 2y + z + 5 = 0$

- 1) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) với mp(P) là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π ,
- 2) Chứng minh rằng mặt cầu (S) nói trong phần 1 tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 2x - 2 = y + 3 = z$,
- 3) Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

- 1) Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C).

Ta có: $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$ và $d(I, (P)) = 3$ nên $R = \sqrt{r^2 + d^2(I, (P))} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

- 2) Đường thẳng Δ có $\vec{u}_{\Delta} = (1; 2; 2)$ là VTCP và đi qua $A(1; -3; 0)$.

$$\text{Suy ra } \vec{AI} = (0; 5; -2) \Rightarrow [\vec{u}_{\Delta}, \vec{AI}] = (-14; 2; 5) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{|\vec{u}_{\Delta}, \vec{AI}|}{|\vec{u}_{\Delta}|} = 5$$

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Cách 2.

$$\text{Phương trình tham số của } \Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ thay vào phương trình mặt}$$

$$\text{cầu (S), ta được: } t^2 + (2t-5)^2 + (2t+2)^2 = 25 \Leftrightarrow (3t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra mặt cầu (S) và } \Delta \text{ giao nhau tại một điểm } M\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M.

- 3) Vì mp(Q) chứa Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) nên M là tiếp điểm của mp(Q) và mặt cầu (S).

$$\text{Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua M và nhận } \vec{IM}\left(\frac{2}{3}; -\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right) \text{ làm VTPT.}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng (Q) : } 2x - 11y + 10z - 35 = 0.$$

Ví dụ 3.5.8. Cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$$

2) Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R .

3) Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

Lời giải.

1) Sử dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của $mp(ABC)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Mặt khác $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} = 1 \Rightarrow mp(ABC)$ luôn đi qua

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

2) Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $OABC$ có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0.$$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào ta có:

$$\begin{cases} a^2 - 2ma + q = 0 \\ b^2 - 2nb + q = 0 \\ c^2 - 2cp + q = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{a}{2}; & n = \frac{b}{2} \\ p = \frac{c}{2}; & q = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm của mặt cầu (S) là $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ và bán kính

$$R = IO = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a^2 + \frac{27}{8a} + \frac{27}{8a} \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow a^2 + \frac{27}{4a} \geq \frac{27}{4}.$$

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự: $b^2 + \frac{27}{4b} \geq \frac{27}{4}$; $c^2 + \frac{27}{4c} \geq \frac{27}{4}$.

Cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{27}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{27}{4} \Rightarrow R \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \min R = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

3) Ta có thể tích của tứ diện OABC là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện:

$$S_{tp} = \frac{1}{2}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2})$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Từ giả thiết bài toán ta suy ra $ab + bc + ca = 2abc$.

$$\text{Mặt khác: } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$$

$$\text{Nên } r \leq \frac{abc}{2abc + \frac{2}{\sqrt{3}}abc} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

$$\text{Mặt khác: } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 < (ab + bc + ca)^2 = (2abc)^2$$

$$\Rightarrow r > \frac{abc}{4abc} = \frac{1}{4}.$$

5.3. Bài tập vận dụng

Bài 3.5.1. Lập phương trình mặt cầu (S), biết (S):

- 1) Có tâm I(1; 1; 2) và tiếp xúc với mp(P): $x + 2y + 2z + 1 = 0$.
- 2) Có bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với mp(P): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ tại điểm A(1; 1; -3).
- 3) Có tâm nằm trên đường thẳng d: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 2 = 0$ và (Q): $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
- 4) Đi qua bốn điểm A(0; 1; 0), B(2; 3; 1), C(-2; 2; 2) và D(1; -1; 2).
- 5) Có tâm thuộc mp(P): $x + y + z - 2 = 0$ và đi qua ba điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1).
- 6) Đi qua điểm M(1; -5; 2) và qua đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S'): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0$ và mp(α): $2x + 2y - z + 9 = 0$.

Bài 3.5.2. Lập phương trình mặt cầu (S) biết

1) Có tâm $I(6; 3; -4)$ và tiếp xúc với Oy .

2) Có tâm nằm trên đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ và tiếp xúc với hai mặt

phẳng (P): $x - 2z - 8 = 0$ và (Q): $2x - z + 5 = 0$.

Bài 3.5.3. Cho đường tròn (C) là giao tuyến của $(\alpha): x - 2y + 2z + 1 = 0$

và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$

1) Xác định tâm và bán kính của đường tròn (C).

2) Viết phương trình mặt cầu (S') chứa đường tròn (C) và có tâm nằm trên (P): $x + y + z + 3 = 0$.

Bài 3.5.4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \text{ và mặt cầu (S): } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn có bán kính $r = 1$.

Bài 3.5.5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$

và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Bài 3.5.6. Cho các điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(5; -2; 7)$, $C(1; 8; -1)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn

1) $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

2) $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}|$.

Bài 3.5.7. Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz cho hai mặt phẳng song song có các phương trình tương ứng là:

$(P_1): 2x - y + 2z - 1 = 0$; $(P_2): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1; 1; 1)$

nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu bất kỳ qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$

1) Chứng tỏ rằng bán kính của hình cầu (S) là một hằng số và tính bán kính đó.

- 2) Gọi I là tâm của hình cầu (S) . Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định tọa độ của tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 3.5.8. Cho mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$ và mặt cầu $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường nối tâm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) , tiếp xúc với hai mặt cầu đó và có bán kính lớn nhất.

Bài 3.5.9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối D - 2011)

Bài 3.5.10. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối A - 2010)

Bài 3.5.11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình: $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó..

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối A - 2009)

Bài 3.5.12. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 1 = 0$

và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

- Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng Δ_2 , tiếp xúc với đường thẳng Δ_1 và (α) .
- Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_1 , tiếp xúc với (α) và cắt đường thẳng Δ_2 tại hai điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{30}$.
- Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_2 , tiếp xúc với Δ_1 và cắt (α) theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{13}$.

Hướng giải.

Bài 3.5.1.

1) Ta có, bán kính mặt cầu $R = d(I, (P)) = \frac{|1 + 2 + 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{64}{9}$.

2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mp(P)

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mp(P) tại A nên tâm

$$I \in \Delta \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -3+2t)$$

Và $d(I, (P)) = R = 3 \Leftrightarrow \frac{|9t|}{3} = 3 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

* Với $t = 1 \Rightarrow I(2; 3; -1) \Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

* Với $t = -1 \Rightarrow I(0; -1; -5) \Rightarrow (S): x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm $I \in d \Rightarrow I(2-3t; 1+2t; 1+2t)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mp (P) và (Q) nên $d(I, (P)) = d(I, (Q)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-3t|}{3} = \frac{|6-3t|}{3} \Leftrightarrow -3t = -6+3t \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1; 3; 3) \text{ và } R = 1.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$.

4) Giả sử phương trình mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

$$\text{Vì } A, B, C, D \in (S) \Rightarrow \begin{cases} -2b + d + 1 = 0 \\ -4a - 6b - 2c + d + 14 = 0 \\ 4a - 4b - 4c + d + 12 = 0 \\ -2a + 2b - 4c + d + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2b - 1 \\ -4a - 4b - 2c + 13 = 0 \\ 4a - 2b - 4c + 11 = 0 \\ -2a + 4b - 4c + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, d = 2.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z + 2 = 0$.

5) Giả sử phương trình mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

$$\forall \begin{cases} A, B, C \in (S) \\ I \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c - 2 = 0 \\ -4a - 2c + d + 5 = 0 \\ -2a + d + 1 = 0 \\ -2a - 2b - 2c + d + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ -2a - 2c + 4 = 0 \\ a + b + c - 2 = 0 \\ -2b - 2c + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

6) Mặt cầu (S') có tâm $I'(-1; 2; 2)$, $R' = 7$

$$d(I', (\alpha)) = \frac{|-2 + 4 - 2 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3 < R' \text{ nên đường tròn (C) tồn tại và}$$

có bán kính $r = 2\sqrt{10}$. Gọi H là tâm của (C).

Ta có $I'H \perp (\alpha) \Rightarrow I'H: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ Suy ra tọa độ của H là nghiệm

của hệ: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - t \\ 2x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(-3; 0; 3).$

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm H và vuông góc với (α) , suy ra

phương trình của d: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), vì (S) đi qua đường tròn (C) nên $I \in d$

Suy ra $I(-3 + 2t; 2t; 3 - t) \Rightarrow \overline{MI} = (2t - 4; 2t + 5; 1 - t)$,

$$d(I, (\alpha)) = \frac{|9t|}{3} = 3|t|$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} IM^2 &= r^2 + d^2(I, (\alpha)) \Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (2t + 5)^2 + (1 - t)^2 = 40 + 9t^2 \\ &\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-5; -2; 4), R = IM = 7. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (S) : $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 49$.

Cách 2.

Vì mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) nên phương trình (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 + \lambda(2x + 2y - z + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + (2 + 2\lambda)x - (4 - 2\lambda)y - (4 + \lambda)z - 40 + 9\lambda = 0.$$

$$\text{Vì } M(1; -5; 2) \in (S) \Rightarrow 44 - 10\lambda - 40 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu (S) : } x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 8z - 4 = 0.$$

Bài 3.5.2.

1) Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với Oy nên suy ra $R = d(I, Oy) = 3$

$$\text{Vậy phương trình (S) : } (x - 6)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 9.$$

2) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-2; 0; z)$

Do (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên ta có:

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|2z + 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|z - 1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow z = -11, z = -3.$$

$$\bullet z = -3 \Rightarrow I(-2; 0; -3), R = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{phương trình}$$

$$(S) : (x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}.$$

$$\bullet z = -11 \Rightarrow I(-2; 0; -11), R = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{phương trình}$$

$$(S) : (x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \frac{144}{5}.$$

Bài 3.5.3.

1) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -3; -3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

$d(I, (\alpha)) = 1 < R$ nên đường tròn (C) có bán kính $r = 2$.

$$\text{Gọi H là tâm của (C), suy ra } IH : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \\ z = -\frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{11}{3}\right)$$

2) Gọi d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với

$$(\alpha) \Rightarrow d: \begin{cases} x = \frac{5}{3} + t \\ y = -\frac{7}{3} - 2t \\ z = -\frac{11}{3} + 2t \end{cases}$$

Gọi I', R' là tâm và bán kính của mặt cầu (S')

$$\text{Vì } I' \in d, I' \in (P) \Rightarrow I': \begin{cases} x = \frac{5}{3} + t \\ y = -\frac{7}{3} - 2t \\ z = -\frac{11}{3} + 2t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 5; 1)$$

$$\text{Suy ra } d(I', (\alpha)) = \frac{4}{3} \Rightarrow R' = \sqrt{r^2 + d^2(I', (\alpha))} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{Vậy phương trình } (S'): (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = \frac{52}{9}.$$

Bài 3.5.4. Đường thẳng d đi qua $A(0; -2; -6)$ và có $\vec{u} = (1; 1; 2)$ là VTCP.

Phương trình của (P) có dạng: $ax + b(y+2) + c(z+6) = 0$

$$\text{Hay } ax + by + cz + 2b + 6c = 0$$

Trong đó $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và $a + b + 2c = 0 \Rightarrow a = -b - 2c$ (1).

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -1)$, bán kính $R = 2$.

$$\text{Theo giả thiết, ta suy ra } d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Do đó: } \frac{|-a + 3b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |4b + 7c| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(b+2c)^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow (4b + 7c)^2 = 3(2b^2 + 4bc + 5c^2)$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 + 22bc + 17c^2 = 0 \Leftrightarrow b = -c, b = -\frac{17}{5}c$$

$$\bullet b = -c \text{ ta chọn } c = -1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (P): x + y - z - 4 = 0$$

$$\bullet b = -\frac{17}{5}c \text{ ta chọn}$$

$$c = 5 \Rightarrow b = -17 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow (P): 7x - 17y + 5z - 4 = 0.$$

Bài 3.5.5. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

- 1) Trục Ox có phương trình: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (Q): $ay + bz = 0$.

Mặt cầu (S) cắt (Q) theo một đường tròn có bán kính $r = 3 = R$
 $\Rightarrow I \in (Q) \Rightarrow -2a - b = 0$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -2$.

Vậy phương trình mp(Q): $y - 2z = 0$.

- 2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(P). Suy ra phương trình của Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B.

Khi đó nếu $d(A, (P)) > d(B, (P)) \Rightarrow d(M, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A$.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai giao điểm $A(-1; -1; -3)$, $B(3; -3; 1)$.

Ta có: $d(A, (P)) = 7 > d(B, (P)) = 1$.

Vậy $d(M, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M(-1; -1; -3)$.

Bài 3.5.6. Gọi tọa độ điểm M là $M(x; y; z)$, ta có $\overline{AM}(x+2; y-3; z-1)$ và

$\overline{BM}(x-5; y+2; z-7)$, $\overline{CM}(x-1; y-8; z+1)$ nên

$$MA^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2,$$

$$MB^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2,$$

$$MC^2 = (x-1)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2.$$

Do đó đẳng thức $MA^2 + MB^2 = MC^2$ tương đương với

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 + (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 \\ &= (x-1)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 14y - 18z + 26 = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I(2; -7; 9)$, bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

- 2) Tương tự câu 1, ta có $\overline{AB} = (7; -5; 6)$ nên

$$\overline{AM} + \overline{AB} = (x+9; y-8; z+5), \quad \overline{BM} + \overline{CM} = (2x-6; 2y-6; 2z-6)$$

$$\text{Nên } |\overline{AM} + \overline{AB}| = |\overline{BM} + \overline{CM}| \Leftrightarrow (x+9)^2 + (y-8)^2 + (z+5)^2$$

$$= (2x-6)^2 + (2y-6)^2 + (2z-6)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 42x - 8y - 34z - 62 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x - \frac{8}{3}y - \frac{34}{3}z - \frac{62}{3} = 0$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I\left(7; \frac{4}{3}; \frac{17}{3}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{932}}{3}$.

Bài 3.5.7.

1) Ta có khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ bằng: 6

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song (P_1) và (P_2) nên bán kính mặt cầu (S) là: $R = 3$.

2) Gọi (R) là mặt phẳng song song với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ và nằm ở giữa hai mặt phẳng đó, suy ra (R): $2x - y + 2z + 2 = 0$

Gọi I là tâm của mặt cầu, suy ra $I \in (R)$. Hơn nữa $IA = 3$ nên I thuộc mặt cầu (S') tâm A bán kính bằng 3. Do đó I thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S') và mặt phẳng (R). Từ đó ta tìm được tâm (C) là

$$H\left(-\frac{11}{9}; \frac{10}{9}; \frac{7}{9}\right), \text{ bán kính } r = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Bài 3.5.8. Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3; 6; -6)$, $R_1 = 3$. (S_2) có tâm $I_2(0; 0; 0)$

và bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_2I_1(3; 6; -6) \Rightarrow I_2I_1 = 9 > R_1 + R_2$.

Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau, nên mặt cầu cần tìm có tâm I là

$$\text{trung điểm của } I_2I_1 \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; 3; -3\right), \text{ bán kính } R = \frac{I_2I_1}{2} + R_1 = \frac{15}{2}$$

(mặt cầu (S) tiếp xúc trong với (S_1) và (S_2)).

$$\text{Phương trình (S): } x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 6y + 6z - 36 = 0.$$

Bài 3.5.9. Gọi (S) là mặt cầu cần tìm, I là tâm.

$$\text{Phương trình tham số đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Vì } I \in \Delta \Rightarrow I(1 + 2t; 3 + 4t; t).$$

Ta có (P) tiếp xúc với (S)

$$\text{nên } d(I, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2(1 + 2t) - (3 + 4t) + 2t|}{3} = 1 \Leftrightarrow t = 2, t = -1$$

• $t = 2 \Rightarrow I(5; 11; 2) \Rightarrow$ phương trình mặt cầu

$$(S): (x - 5)^2 + (y - 11)^2 + (z - 2)^2 = 1$$

• $t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; -1)$, suy ra phương trình

$$(S): (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 1.$$

Bài 3.5.10. Đường thẳng Δ qua $M(-2; 2; -3)$ và có $\vec{u} = (2; 3; 2)$ là vtcp;

$$d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3$$

Gọi H là hình chiếu của A lên Δ thì $AH = 3$ và H là trung điểm của BC nên $BH = 4$. Vậy bán kính mặt cầu là $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5$.

Nên phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$.

Bài 3.5.11. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ I đến (P) : $d(I, (P)) = \frac{|2 - 4 - 3 - 4|}{3} = 3 < R$.

Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi H , r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đó, suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 0; 2).$$

Bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Bài 3.5.12.

1) Gọi I là tâm mặt cầu, R là bán kính. Do $I \in \Delta_2$ nên ta có:

$$I(3 + t; -t; 5 + t).$$

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(-1; -2; -2)$, VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; 2)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1I} = (t + 4; -t + 2; t + 7)$, $\overrightarrow{M_1I} \wedge \vec{u}_1 = (-3t - 3; 6; 3t)$

$$\text{Do đó: } d(I, \Delta_1) = \frac{|\overrightarrow{M_1I} \wedge \vec{u}_1|}{|\vec{u}_1|} = \sqrt{(t + 1)^2 + 4 + t^2} = \sqrt{2t^2 + 2t + 5}$$

Vì (S) tiếp xúc với Δ_1 và (α) nên ta có: $d(I, (\alpha)) = d(I, \Delta_1) = R$

$$\Leftrightarrow |t + 5| = \sqrt{2t^2 + 2t + 5} \Leftrightarrow t^2 - 8t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10, t = -2$$

• $t = -2$, suy ra $I(1; 2; 3)$, $R = 3$.

Phương trình (S) : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

• $t = 10$, suy ra $I(13; -10; 15)$, $R = 15$.

Phương trình (S) : $(x - 13)^2 + (y + 10)^2 + (z - 15)^2 = 225$.

- 2) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-1 + 2t; -2 + t; -2 + 2t)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(3; 0; 5)$, có VTCP $\vec{u}_2 = (1; -1; 1)$

Suy ra $\vec{M_2I} = (2t - 4; t - 2; 2t - 7)$, $\vec{M_2I} \wedge \vec{u}_2 = (3t - 9; -3; -3t + 6)$

$$\text{Nên } d(I, \Delta_2) = \sqrt{3[(t-3)^2 + 1 + (t-2)^2]} = \sqrt{3(2t^2 - 10t + 14)}$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với (α) nên $R = d(I, (\alpha)) = |3t - 3|$

Từ đẳng thức $R^2 = \frac{MN^2}{4} + d^2(I, \Delta_2)$ ta có:

$$(3t - 3)^2 = 30 + 3(2t^2 - 10t + 14)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = -7, t = 3$$

- $t = 3$, suy ra $I(5; 1; 4)$, $R = 6$.

Phương trình (S) : $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 36$.

- $t = -7$, suy ra $I(-15; -9; -16)$, $R = 24$.

Phương trình (S) : $(x + 15)^2 + (y + 9)^2 + (z + 16)^2 = 576$.

- 3) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(3 + t; -t; 5 + t)$

$$\text{Ta có: } R = d(I, \Delta_1) = \frac{|\vec{M_1I} \wedge \vec{u}_1|}{|\vec{u}_1|} = \sqrt{2t^2 + 2t + 5}$$

Vì (S) cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{13}$ nên ta có:

$$R^2 = r^2 + d^2(I, (\alpha)) \Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 5 = 13 + (t + 5)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 8t - 33 = 0 \Leftrightarrow t = -3, t = 11.$$

- $t = -3$, suy ra $I(0; 3; 2)$, $R = \sqrt{17}$

Phương trình (S) : $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 17$.

- $t = 11$, suy ra $I(14; -11; 16)$, $R = \sqrt{269}$

Phương trình (S) : $(x - 14)^2 + (y + 11)^2 + (z - 16)^2 = 269$.

Chuyên đề 6. CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

6.1. Phương pháp giải.

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm.

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học: Sử dụng các kết quả trong hình học để xác định cực trị.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số: Chuyển biểu thức cần tìm cực trị về một biểu thức đại số và tìm cực trị của biểu thức đó.

6.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 3.6.1. Trong không gian cho ba điểm

$A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; -3)$, $C(2; -3; -1)$

- 1) Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất $S = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$.
- 2) Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P = |\overline{MA} - 7\overline{MB} + 5\overline{MC}|$.
- 3) Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$ sao cho biểu thức $F = MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Cách 1:

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn:

$$3\overline{IA} + 4\overline{IB} - 6\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IA} = 6\overline{AC} - 4\overline{AB} \quad (*)$$

$$\text{Mà } \overline{IA} = (1-x; 2-y; 3-z), 6\overline{AC} = (6; -30; -24), 4\overline{AB} = (-8; -8; -24)$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 6+8 \\ 2-y = -30+8 \\ 3-z = -24+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 24 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(-13; 24; 3).$$

$$\text{Khi đó: } S = 3\overline{MA}^2 + 4\overline{MB}^2 - 6\overline{MC}^2$$

$$= 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 4(\overline{MI} + \overline{IB})^2 - 6(\overline{MI} + \overline{IC})^2$$

$$= IM^2 + 2\overline{MI}(3\overline{IA} + 4\overline{IB} - 6\overline{IC}) + 3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2$$

$$= IM^2 + 3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2.$$

Do $3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất
 $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (α) .

Ta có $IM \perp (\alpha) \Rightarrow IM: \begin{cases} x = -13 + 2t \\ y = 24 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = -13 + 2t \\ y = 24 + t \\ z = 3 - 2t \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 25 \\ z = 1 \end{cases}$

Vậy $M(-11; 25; 1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a; b; c) \in (\alpha) \Rightarrow 2a + b - 2c - 1 = 0$

Suy ra: $3MA^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6a - 12b - 18c + 42$

$4MB^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8a + 24c + 40$

$6MC^2 = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 24a + 36b + 12c + 84$

Suy ra $S = a^2 + b^2 + c^2 + 26a - 48b - 6c - 2$
 $= (a + 11)^2 + (b - 25)^2 + (c - 1)^2 + 4a + 2b - 4c - 749$
 $\geq 2(2a + b - 2c - 1) - 747 \geq -747$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = -11, b = 25, c = 1$ hay $M(-11; 25; 1)$ là điểm cần tìm

2) Cách 1: Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad (*)$

Mà $\overrightarrow{IA} = (1 - x; 2 - y; 3 - z)$, $-7\overrightarrow{AB} = (14; 14; 42)$, $5\overrightarrow{AC} = (5; -25; -20)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 14 + 5 \\ 2 - y = 14 - 25 \\ 3 - z = 42 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = 13 \\ z = -19 \end{cases} \Rightarrow I(-18; 13; -19).$

Khi đó: $P = \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| = MI.$

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ .

$M \in \Delta \Rightarrow M(1 + 2t; -1 + 3t; 1 - t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2t + 19; 3t - 14; -t + 20)$

Vì $IM \perp \Delta \Rightarrow 2(2t + 19) + 3(3t - 14) - (-t + 20) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{12}{7}.$

Vậy $M\left(\frac{31}{7}; \frac{29}{7}; -\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t; -1+3t; 1-t)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-2t; 3-3t; 2+t)$, $-7\overrightarrow{MB} = (14+14t; -7+21t; 28-7t)$,

$$5\overrightarrow{MC} = (5-10t; -10-15t; -10+5t).$$

Do đó $\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = (2t+19; 3t-14; -t+20)$.

$$\text{Nên } P^2 = (2t+19)^2 + (3t-14)^2 + (t-20)^2 = 14t^2 - 48t + 957$$

$$= 14\left(t - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{6411}{7} \geq \frac{6411}{7}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{12}{7}$. Vậy $M\left(\frac{31}{7}; \frac{29}{7}; -\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

3) Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{EA} - 4\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$$

Ta tìm được $E(10; -2; 16)$.

$$\text{Khi đó } F = -EM^2 + EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$$

Vì $EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

$$\text{Mặt cầu (S) có tâm } I(2; 2; 8), \overrightarrow{IE} = (8; -4; 8) \Rightarrow IE: \begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \end{cases}$$

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8^2t^2 + 4^2t^2 + 8^2t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$$\bullet t = \frac{1}{2} \Rightarrow M(6; 0; 12) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2; -2; 4) \Rightarrow MI = 2\sqrt{6}.$$

$$\bullet t = -\frac{1}{2} \Rightarrow N(-2; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (-4; 2; 4) \Rightarrow NI = 6.$$

Do $NI > MI$ nên ta có được:

$$\bullet F \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } E \equiv M \Rightarrow E(6; 0; 12)$$

$$\bullet F \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } E \equiv N \Rightarrow E(-2; 4; 4).$$

Chú ý. Với cách làm tương tự như trên ta có thể giải quyết được các bài toán tổng quát sau

Bài toán 1. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1) Tìm M sao cho $P = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$.

b) Lớn nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$.

2) Tìm M sao cho $P = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất

hoặc lớn nhất, trong đó $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Phương pháp giải

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ điểm I tồn

tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} 1) \quad P &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) IM^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2. \end{aligned}$$

Do $\sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2$ không đổi nên:

• Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất.

• Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất.

$$2) \quad P = \left| \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right| \cdot MI$$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Lưu ý:

• Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).

• Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S) , cắt (S) tại hai điểm A, B ($IA > IB$) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$).

Ví dụ 3.6.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$

và hai điểm $A(5; -2; 6)$, $B(3; -2; 1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1) $MA + MB$ nhỏ nhất.2) $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ là VTPT.

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vectơ pháp tuyến của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P).

- 1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, mà A'B không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(1; 0; 2).$$

H là trung điểm của AA' $\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2; -2).$

Suy ra $\overline{A'B} = (6; -4; 3)$, phương trình A'B: $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{11} \\ y = -\frac{14}{11} \\ z = \frac{5}{11} \end{cases}$

Vậy $M\left(\frac{21}{11}; -\frac{14}{11}; \frac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

- 2) Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có $|AM - MB| \leq AB$, đẳng thức xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

$$\text{Phương trình AB: } \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ M: } \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = -2 \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \text{ . Vậy } M\left(\frac{17}{7}; -2; -\frac{3}{7}\right).$$

Chú ý: Tương tự ta giải được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$,

$B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1) $MA + MB$ nhỏ nhất.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất với $d(A, (P)) \neq d(B, (P))$.

Phương pháp:

• Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).

• Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) > 0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P).

• Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1) $MA + MB$ nhỏ nhất.

• Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

• Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA = MA'$ nên $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất bằng A'B khi $M = A'B \cap (P)$.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất.

• Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

• Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) , khi đó A' và B ở cùng phía (P) và $MA = MA'$ nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$.

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M = A'B \cap (P)$.

Ví dụ 3.6.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

và ba điểm $A(3; 2; -1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(2; 1; 3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1) $MA + MB$ nhỏ nhất

2) $MA + MC$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t; 1-t)$, $\overrightarrow{AM} = (t-3; 2t-2; -t+2)$,

$\overrightarrow{BM} = (t-1; 2t+2; -t)$; $\overrightarrow{CM} = (t-2; 2t-1; -t-2)$.

1) Ta có: $MA + MB = \sqrt{6t^2 - 18t + 17} + \sqrt{6t^2 + 6t + 5}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$,

đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ta có:

$$MA + MB \geq \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t + \sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t = \sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy $M\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Ta có: $MA + CM = \sqrt{6t^2 - 18t + 17} + \sqrt{6t^2 - 4t + 9}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{96 + 5\sqrt{42}}{3}}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} - t\right) \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \left(\frac{1}{3} + t\right) \Leftrightarrow t = \frac{45 - \sqrt{42}}{10 + 3\sqrt{42}}.$$

$$\text{Vậy } M \left(\frac{45 - \sqrt{42}}{10 + 3\sqrt{42}}; \frac{2(45 - \sqrt{42})}{10 + 3\sqrt{42}}; \frac{4\sqrt{42} - 35}{10 + 3\sqrt{42}} \right).$$

Ví dụ 3.6.4. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1; -1; 1)$, đường thẳng Δ

có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng

$$(P): 2x - y + 2z - 1 = 0.$$

- 1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.
- 2) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.
- 3) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1; 1; 1), N(-1; 2; -1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ là VTPT.

Đường thẳng Δ đi qua $B(1; 0; -1)$ và có $\vec{u} = (2; 1; -1)$ là VTCP.

- 1) **Cách 1:** Giả sử $\vec{n} = (a; b; c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1) + by + c(z+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a + c = 0$ (1)
Do $\Delta \subset (Q)$ nên $2a + b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + b$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } d(A, (Q)) &= \frac{|2c - b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|4a + b|}{\sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2}} = \sqrt{\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } b = 0 \Rightarrow d(A, (Q)) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Nếu $b \neq 0$ thì ta đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có:

$$\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2} = \frac{16t^2 + 8t + 1}{5t^2 + 4t + 2} = f(t).$$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = \frac{24t^2 + 54t + 12}{(5t^2 + 4t + 2)^2}, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra $\max f(t) = f(-2) = \frac{7}{2}$, do đó $\max d(A, (Q)) = \frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được

khi $a = -2b$

Chọn $b = -1$ ta tìm được $a = 2, c = 3$.

Vậy phương trình (Q): $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Cách 2: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó $d(A, (Q)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$.

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overline{AK}$ làm VTPT.

Vì $K \in \Delta \Rightarrow K(1+2t; t; -1-t) \Rightarrow \overline{AK} = (2t; t+1; -t-2)$

$$AK \perp \Delta \Rightarrow \overline{AK} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 4t + t + 1 + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow K\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overline{AK} = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Vậy phương trình (Q): $2x - y + 3z + 1 = 0$.

2) Cách 1: Tương tự như trên ta có (Q): $ax + by + (2a+b)z + a+b = 0$

Gọi $\alpha = \widehat{(P), (R)}$, $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{|2a - b + 2(2a+b)|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + (2a+b)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2}}$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}$ thì ta có:

$$\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2} = \frac{t^2 + 12t + 36}{2t^2 + 4t + 5} = f(t)$$

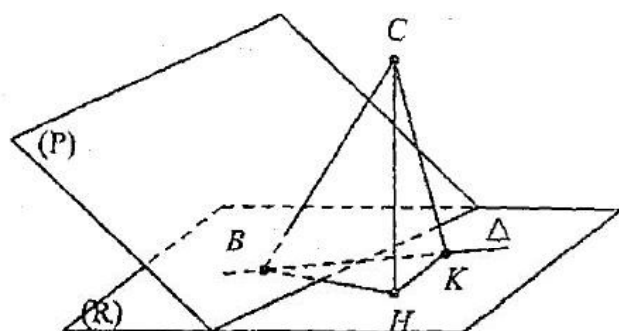
Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t) = f(-\frac{7}{10}) = \frac{53}{6}$.

Suy ra $\max \{\cos \alpha\}$ đạt được khi $\frac{b}{a} = -\frac{7}{10}$, chọn $b = -7 \Rightarrow a = 10$.

Vậy phương trình (R): $10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

$$\text{Ta có phương trình } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \text{ lấy } C(3; -1; 1) \in d, C \neq B$$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ , khi đó $\alpha = \widehat{BCH}$

$$\text{và } \sin \alpha = \sin \widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}.$$

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên

$$\vec{n}_1 = [\vec{n}_P, \vec{u}] = (-1; 6; 4) \text{ là VTPT của (BCK).}$$

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên

$$\vec{n}_R = [\vec{n}_1, \vec{u}] = (10; -7; 13) \text{ là VTPT của (R), suy ra phương trình của}$$

$$(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0.$$

3) **Cách 1:** Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Do } M, N \in (\alpha) \text{ nên } \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + 2b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{2}b \\ c = -a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau:

$$2ax + 2by + (b - 2a)z - 3b = 0$$

Suy ra $\vec{n}_\alpha = (2a; 2b; b - 2a)$ là VTPT của (α) . Gọi $\varphi = (\Delta, (\alpha))$

Ta có:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|4a + 2b - b + 2a|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4a^2 + 4b^2 + (b - 2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{b^2 + 12ab + 36a^2}{5b^2 - 4ab + 8a^2}}$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ với } a \neq 0, \text{ đặt } t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 12t + 36}{5t^2 - 4t + 8}$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{\max} \Leftrightarrow \sin \varphi_{\max} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{8}$, chọn $b = 5, a = 8$.

Vậy phương trình của (α) : $16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM} = (2; -1; 2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình

đường thẳng MN: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Gọi d là đường thẳng đi qua

M, song song với Δ . Suy ra phương trình d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Trên d ta lấy điểm $A(3; 2; 0)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $(\widehat{(\alpha), \Delta}) = \widehat{ABH}$.

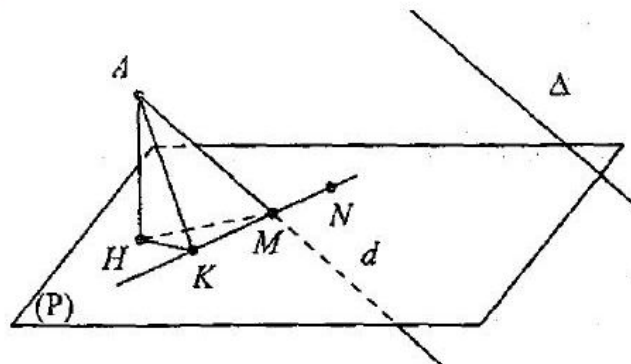
Ta có: $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{BA} \geq \frac{BK}{BA}$, mà $\frac{BK}{BA}$ không đổi nên $\widehat{ABH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$.

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) \equiv (MN, d)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{u}] = (-1; 6; 4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{n_\beta}] = (-16; -10; 11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của (α) : $16x + 10y - 11z - 15 = 0$.



Chú ý: Tương tự như trên ta giải quyết bài toán tổng quát như sau:

Bài toán 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

- 1) (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \notin \Delta$ đến (P) lớn nhất.
- 2) (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.
- 3) (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:**Cách 1: Dùng phương pháp đại số**

- 1) Giả sử đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ và $A(x_0; y_0; z_0)$.

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$

Trong đó $Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\frac{bB + cC}{a} \quad (a \neq 0) \quad (1)$

Khi đó $d(A, (P)) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2)$

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \frac{B}{C}$, ta được $d(A, (P)) = \sqrt{f(t)}$.

Trong đó $f(t) = \frac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được

$\max f(t)$. Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B.

2) và 3) làm tương tự.

Cách 2: Dùng hình học

- 1) Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có: $d(A, (P)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi.

Do đó $d(A, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$.

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overline{AK}$ làm VTPT.

- 2) Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow \widehat{((P), (Q))} = 90^\circ$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

• Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ , dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH \perp (P)$, $CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$. Ta có $\sin \widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}$.

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\vec{n}_P = [\vec{u}_\Delta, [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_Q]]$ là VTPT của (P).

- 3) Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ , dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng d. Hạ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$. Ta có $\cos \widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$.

Mà $\frac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d', Δ) . Suy ra $\vec{n}_P = [\vec{u}_\Delta, [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{d'}]]$ là VTPT của (P).

- Ví dụ 3.6.5. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và
- 1) Δ đi qua $M(1; 1; 1)$ và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất.
 - 2) Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và d: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là VTPT.

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là VTCP của Δ , do

$$\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \quad (1)$$

- 1) Ta có: $\vec{AM} = (0; -1; -2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{AM}] = (c + 2b; 2a; -a)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } d(A, \Delta) &= \frac{[\vec{u}, \vec{AM}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(c + 2b)^2 + 5a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(b - a)^2 + 5a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b^2 - 2ab + 6a^2}{a^2 + ab + b^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ với } a \neq 0 \text{ đặt } t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 + t + 1}$, khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được

$$\max f(t) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 10, \quad \min f(t) = f(4) = \frac{2}{3}.$$

- Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3, c = -1$, suy ra phương trình đường thẳng :

$$\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

- Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t = 4 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 4$, chọn $b = 4 \Rightarrow a = 1, c = -5$, suy ra phương trình đường thẳng :

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

- 2) Đường thẳng d đi qua $N(2; 0; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$ là VTCP

$$\overrightarrow{MN} = (1; -1; -1), [\vec{u}, \vec{u}_1] = (2a + b; -b; 2a - b) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}_1] \cdot \overrightarrow{MN} = 3b$$

$$\text{Do đó } d(\Delta, d) = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}_1] \cdot \overrightarrow{MN}|}{\|[\vec{u}, \vec{u}_1]\|}$$

$$= \frac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2 + b^2 + (2a-b)^2}} = 3 \sqrt{\frac{b^2}{8a^2 + 3b^2}} \leq \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 0 \Rightarrow c = -b \Rightarrow \vec{u} = b(0; 1; -1)$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán trên cũng như bài toán tổng quát bằng cách sử dụng phương pháp hình học tổng hợp.

Ví dụ 3.6.6. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0; -1; 2)$ và cắt

đường thẳng d' : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sao cho:

- 1) Khoảng cách từ $B(2; 1; 1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

- 2) Khoảng cách giữa d và $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t; t; 2-t), t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM} = (2t-1; t+1; -t)$ là VTCP của đường thẳng d.

- 1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (1-t; 1; 4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B, d) = \frac{\|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \sqrt{\frac{5t^2 - 18t + 18}{6t^2 - 2t + 2}} = \sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t) = \frac{5t^2 - 18t + 18}{6t^2 - 2t + 2}$ nên $f'(t) = \frac{98t(t-2)}{(6t^2 - 2t + 2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t) = f(0) = 18$, $\min f(t) = f(2) = \frac{1}{11}$.

Do đó:

• $\min d(B, d) = \frac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (3; 3; -2)$ nên

phương trình đường thẳng cần tìm d : $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

• $\max d(B, d) = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1; 1; -1)$ nên

phương trình đường thẳng cần tìm d : $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

2) Δ đi qua $N(5; 0; 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_{\Delta} = (2; -2; 1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u}_{\Delta}, \overrightarrow{AM}\right] = (t-1; 4t-1; 6t)$, $\overrightarrow{AN} = (5; 1; -2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u}_{\Delta}, \overrightarrow{AM}\right] \cdot \overrightarrow{AN} \right|}{\left\| \left[\overrightarrow{u}_{\Delta}, \overrightarrow{AM}\right] \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{AN} \right\|} = \frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2 + (4t-1)^2 + (6t)^2} \cdot \sqrt{30}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}} = 3\sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}$$

Vì $f'(t) = \frac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2 - 10t + 2)^2}$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = \frac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t) = f\left(\frac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{37}(29; -41; 4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là d : $\frac{x}{29} = \frac{y+1}{-41} = \frac{z-2}{4}$.

6.3. Bài tập vận dụng

Bài 3.6.1. Trong không gian Oxyz cho các điểm A(1; 4; 5), B(0; 3; 1),

C(2; -1; 0) và mặt phẳng (P): $3x - 3y - 2z - 15 = 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

- 1) $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.
- 2) $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ có giá trị lớn nhất.

Bài 3.6.2. Cho các điểm A(1; 0; -1), B(2; -2; 1), C(0; -1; 0).

- 1) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 6 = 0$ sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 2) Tìm M thuộc mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{57}{2}$ sao cho $|2\overline{MA} - 4\overline{MB} + 3\overline{MC}|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3.6.3. Cho d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và d': $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$,

(Q): $x + 2y + 2z - 3 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

- 1) Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) nhỏ nhất.
- 2) Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' lớn nhất.

Bài 3.6.4. Trong không gian cho hai điểm A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4) và đường

thẳng: d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

- 1) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.
- 2) Viết phương trình (Q) chứa d vào tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất.
- 3) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa d và tạo với Oy một góc lớn nhất.

Bài 3.6.5. Cho các điểm A(1; -1; 2), B(-2; 1; 0), C(2; 0; 1) và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - z + 3 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

- 1) $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất
- 2) $|\overline{MA} - \overline{MC}|$ có giá trị lớn nhất
- 3) $MA + MC$ có giá trị nhỏ nhất
- 4) $|\overline{MA} - \overline{MB}|$ có giá trị lớn nhất.

Bài 3.6.6. Cho $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$ và $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm điểm

M thuộc đường thẳng Δ sao cho

- 1) $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất
- 2) $|3\vec{OM} + 2\vec{AM} - 4\vec{BM}|$ nhỏ nhất.
- 3) Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.

Bài 3.6.7. Cho $O(0; 0; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$, đường

thẳng $d': \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng d qua

O , vuông góc với Δ và cách d' khoảng lớn nhất.

Bài 3.6.8. Cho các điểm $A(4; 1; 2), B(1; 4; 2), C(1; 1; 5)$ và đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3.6.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

(Trích đề thi ĐH khối A - 2008)

Hướng dẫn giải.

Bài 3.6.1.

- 1) Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1; 2; 2)$.

Khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của G trên (P) .

Ta tìm được điểm $M(4; -1; 0)$ là điểm cần tìm.

- 2) Gọi $E(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{EA} + 2\vec{EB} - 4\vec{EC} = \vec{0}$, ta tìm được tọa độ điểm $E(7; -16; -7)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2 = -MG^2 + GA^2 + 2GB^2 - 4GC^2$$

Nên $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ lớn nhất khi M là hình chiếu của điểm E trên mặt phẳng (P) .

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-7}{3} = \frac{y+16}{-3} = \frac{z+7}{-2} \\ 3x - 3y - 2z - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{25}{11}; -\frac{74}{11}; -\frac{9}{11}\right).$$

Bài 3.6.2.

- 1) Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1; -1; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ nên $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}|$, nên

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên (P) .

Giả sử $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{IM} = (x-1; y+1; z)$

Nên từ $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = t \cdot \vec{n}_P \\ M \in (P) \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \\ x-2y+2z+6=0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; -2).$

Vậy điểm $M(0; 1; -2)$ là điểm cần tìm.

- 2) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$

Gọi $J(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{JA} = (1-a; -b; -1-c)$, $\overrightarrow{JB} = (2-a; -2-b; 1-c)$,
 $\overrightarrow{JC} = (-a; -1-b; -c)$

Nên $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = (-6-a; 5-b; -6-c)$, suy ra $J(-6; 5; -6)$.

Vì $2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{MJ}$ nên biểu thức $|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MJ lớn nhất.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = (-7; 4; -7) \Rightarrow JI: \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$ thay vào phương trình (S) ta

có $49t^2 + 16t^2 + 49t^2 = \frac{57}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$

Suy ra IJ cắt (S) tại hai điểm $E\left(-\frac{5}{2}; 3; -\frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{9}{2}; -1; \frac{9}{2}\right)$

Do $JE < JF$ nên JM lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv F$

Vậy $M\left(\frac{9}{2}; -1; \frac{9}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 3.6.3. Đường thẳng d qua hai điểm $M(1; -2; 0), N(2; 0; -1)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên (P) hai điểm $M, N \in (P)$.

1) Phương trình mặt phẳng (P) qua M có dạng

$$(P): A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì (P) qua N nên $C = A + 2B$.

Ta có $\vec{n}_P = (A; B; A + 2B)$, $\vec{n}_Q = (1; 2; 2)$ là VTPT của (P) và (Q)

nên góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là φ thỏa mãn

$$\bullet \text{ Nếu } B = 0 \text{ thì } A \neq 0 \text{ nên } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } B \neq 0 \text{ thì đặt } t = \frac{A}{B}, t \in \mathbb{R} \text{ ta có:}$$

$$\cos \varphi = \frac{(t+2)^2}{\sqrt{2t^2 + 4t + 5}} = \sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(t+2)^2}{2t^2 + 4t + 5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \frac{5}{6}$ khi $t = \frac{1}{2}$, hay $A = \frac{1}{2}B$.

Chọn $B = 2$ thì $A = 1$ và $C = 5$.

Hay phương trình $(P): x + 2y + 5z + 3 = 0$.

2) Tương tự câu 1) ta có phương trình mặt phẳng (P) là

$$A(x-1) + B(y+2) + (A+2B)z = 0, A^2 + B^2 + (A+2B)^2 > 0.$$

Ta có $\vec{u}_{d'} = (2; -1; 2)$ là VTCP của d' nên góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là α thỏa mãn

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = \frac{|4A + 3B|}{3 \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + (A+2B)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4A + 3B)^2}{2A^2 + 4AB + 5B^2}}$$

$$\bullet \text{ Nếu } B = 0 \text{ thì } A \neq 0 \text{ nên } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } B \neq 0 \text{ thì đặt } t = \frac{A}{B}, t \in \mathbb{R} \text{ ta có:}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2 + 4t + 5}} = \sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2 + 4t + 5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \frac{25}{3}$ khi và chỉ khi $t = -7$, hay $A = -7B$.

Tức là $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Bài 3.6.4.

- 1) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên d và (P).

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK$

Mà AK không đổi nên $d(A, (P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overline{AK}$ làm VTPT

Ta tìm được $K\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overline{AK} = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Vậy phương trình (P) : $5x + 13y - 4z + 21 = 0$.

- 2) Vì (Q) chứa d nên phương trình của (Q) có dạng:

$$ax + (a - 2c)y + cz + a - 4c = 0$$

Gọi $\alpha = \overline{(P), (Oxy)}$, ta có: $\cos \alpha = \frac{|c|}{\sqrt{2a^2 - 4ac + 5c^2}}$

Nếu $c = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0$. Với $c \neq 0$ ta có: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a}{c} - 1\right)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Nên α nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$ ta chọn $c = 1 \Rightarrow a = 1$

Vậy phương trình (Q) : $x - y + z - 3 = 0$.

- 3) Phương trình (R) : $ax + (a - 2c)y + cz + a - 4c = 0$. Gọi $\beta = \overline{(Oy), (R)}$

Ta có: $\sin \beta = \frac{|a - 2c|}{\sqrt{2a^2 - 4ac + 5c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 4ac + 4c^2}{2a^2 - 4ac + 5c^2}}$

Nếu $c = 0 \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nếu $c \neq 0$, đặt $t = \frac{a}{c}$ và khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 4}{2t^2 - 4t + 5}$ ta tìm

được $\max f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$, suy ra β lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$

Chọn $c = -1 \Rightarrow a = 1$. Phương trình (R) : $x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Bài 3.6.5.

Ta thấy các điểm A, C nằm cùng phía và A, B nằm khác phía so với (P).

- 1) Ta có $MA + MB \geq AB$ và A, B nằm khác phía so với (P) nên $\min(MA + MB) = AB$ khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng AB: } \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ta có $M \in AB \Rightarrow M(1 - 3t; -1 + 2t; 2 - 2t)$, mà $M \in (P)$ nên

$$2(1 - 3t) - (-1 + 2t) - (2 - 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Vậy $M\left(-1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

- 2) Ta có $|MA - MC| \leq AC$ và A, C nằm cùng phía so với (P) nên $\max(|MA - MC|) = AC$ khi và chỉ khi $M = AC \cap (P)$.

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -3; 4).$$

Vậy $M(-1; -3; 4)$ là điểm cần tìm.

- 3) Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

$$\text{Ta tìm được } H\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), suy ra $A'\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, C ở cùng phía so với (P) nên A', C ở khác phía so với (P).

Ta có $MA + MC = MA' + MC \geq A'C$ nên $\min(MA + MC) = A'C$ khi và chỉ khi $M = A'C \cap (P)$.

$$\text{Do } \overline{A'C} = \frac{1}{3}(11; -1; -7) \text{ nên } A'C: \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7}.$$

$$\text{Từ đó ta tìm được tọa độ điểm } M\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

- 4) Gọi A' đối xứng với A qua (P) thì $A'\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, B ở khác phía so với (P) nên A', B ở cùng phía so với (P).

Ta có $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ nên $\max(|MA - MB|) = A'B$ khi và chỉ khi $M = A'B \cap (P)$.

Do $\overline{A'B} = -\frac{1}{3}(1; -2; 10)$ nên $A'B: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{10}$.

Suy ra tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.

Bài 3.6.6. Vì điểm $M \in \Delta$ nên $M(1-t; -2+t; 2t), t \in \mathbb{R}$.

1) Ta có $\overline{MA}(t; 6-t; 2-2t), \overline{MB}(t-2; 4-t; 4-2t)$. Nên

$$T = MA^2 + MB^2 = t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2 + (t-2)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2 \\ = 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hay giá trị nhỏ nhất của $T = 28$ khi $t = 2$, hay $M(-1; 0; 4)$.

Vậy $M(-1; 0; 4)$ là điểm cần tìm

2) Ta có $\overline{OM} = (1-t; -2+t; 2t), \overline{AM} = (-t; t-6; 2t-2),$

$$\overline{BM} = (2-t; t-4; 2t-4).$$

Do đó $\overline{w} = 3\overline{OM} + 2\overline{AM} - 4\overline{BM} = (-5-t; t-2; 2t+12)$.

Nên ta có $|\overline{w}| = \sqrt{(-5-t)^2 + (t-2)^2 + (2t+12)^2} = \sqrt{6t^2 + 54t + 173}$

$$= \sqrt{6\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{319}{2}} \geq \frac{\sqrt{638}}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|3\overline{OM} + 2\overline{AM} - 4\overline{BM}|$ là $\frac{\sqrt{638}}{2}$, đạt được khi

$$M\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -3\right).$$

3) Ta có $\overline{AM}(-t; t-6; 2t-2), \overline{AB}(-2; -2; 2)$ nên

$$[\overline{AM}, \overline{AB}] = (6t-16; 4-2t; 4t-12).$$

Vì thể tích tam giác MAB là

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \|\overline{AM}, \overline{AB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(6t-16)^2 + (4-2t)^2 + (4t-12)^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{56\left(t - \frac{19}{7}\right)^2 + \frac{24}{7}} \geq \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Vậy $S_{\Delta MAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow t = \frac{19}{7} \Rightarrow M\left(-\frac{12}{7}; \frac{5}{7}; \frac{38}{7}\right)$.

Bài 3.6.7. Gọi $\vec{u}_d = (a; b; c)$ là VTCP của d , trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Vì $d \perp \Delta$ nên $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a + 2b$.

Vì d' qua $M(0; -1; 1)$ và có $\vec{u}_{d'} = (2; -2; -1)$.

Ta có: $[\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d] = (2a - 3b; a - 4b; 2a + 2b)$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng là

$$d(d', d) = \frac{|\vec{u}_{d'} \cdot \vec{u}_d \cdot \vec{OM}|}{\|\vec{u}_{d'} \cdot \vec{u}_d\|} = \frac{|a + 6b|}{\sqrt{(2a - 3b)^2 + (a - 4b)^2 + (2a + 2b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + 6b)^2}{9a^2 - 12ab + 29b^2}}$$

• Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ nên $d(d'; d) = \frac{1}{3}$.

• Nếu $b \neq 0$ thì đặt $t = \frac{a}{b}$, $t \in \mathbb{R}$, khi đó:

$$d(d', d) = \sqrt{\frac{(t + 6)^2}{9t^2 - 12t + 29}} = \sqrt{f(t)}, \quad f(t) = \frac{(t + 6)^2}{9t^2 - 12t + 29}$$

Ta có $f'(t) = \frac{2(t + 6)(65 - 60t)}{(9t^2 - 12t + 29)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -6; t = \frac{13}{12}$.

Vì $f(-6) = 0$; $f\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{17}{9}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(t) = \frac{1}{9}$ nên $\max f(t) = \frac{17}{9}$ khi và

chỉ khi $t = \frac{13}{12}$.

So sánh các trường hợp ta có $\max(d(d', d)) = \frac{\sqrt{17}}{3}$ khi

$b = 12; a = 13; c = 11$, hay phương trình đường thẳng cần tìm là

$$d: \frac{x}{13} = \frac{y}{12} = \frac{z}{11}.$$

Bài 3.6.8. Ta có $\overline{AB}(-3; 3; 0)$, $\overline{BC}(0; -3; 3)$, $\overline{CA}(3; 0; -3)$ nên

$$AB = BC = CA = 3\sqrt{2}.$$

Tam giác ABC là tam giác đều. Các điểm A, B, C thuộc đường tròn (C).

Đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) có tâm I(1; 1; 2), bán kính $R = 3$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 7 = 0$.

Tâm J của đường tròn (C) là trọng tâm tam giác ABC nên $J(2; 2; 3)$.

Bán kính của đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = \sqrt{6}$.

Bài toán trở thành bài toán hình phẳng: Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(J, \sqrt{6})$. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử M thuộc cung $\widehat{BC}$, khi đó $MA = MB + MC$.

Vì vậy $MA + MB + MC = 2MA \leq 2.2r = 4\sqrt{6}$.

Dấu đẳng thức có khi M đối xứng với A qua J, nên $M(0; 3; 4)$.

Tương tự cho trường hợp M thuộc cung $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ ta tìm được các điểm tương ứng là $M(3; 0; 1)$, $M(3; 3; 1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA + MB + MC$ là $4\sqrt{6}$, đạt được khi điểm M là một trong ba điểm $M(0; 3; 4)$, $M(3; 0; 1)$, $M(3; 3; 1)$.

Bài 3.6.9.

- Đường thẳng d có $\overline{u_d} = (2; 1; 2)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A lên d

$$\Rightarrow H(1 + 2t; t; 2 + 2t) \Rightarrow \overline{AH} = (2t - 1; t - 5; 2t - 1).$$

$$\text{Do } AH \perp d \Rightarrow \overline{AH} \cdot \overline{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + t - 5 + 2(2t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 1; 4).$$

- Gọi H' là hình chiếu của A lên mp(P).

Khi đó, ta có: $AH' \leq AH \Rightarrow d(A, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow (P) \perp AH$.

Suy ra $\overline{AH} = (1; -4; 1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H.

Vậy phương trình (P): $x - 4y + z - 3 = 0$.

Chuyên đề 7. GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ

7.1. Phương pháp giải.

Để giải một bài toán không gian tổng hợp bằng phương pháp tọa độ, ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz.

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều...), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ. Nếu ở bước này chúng ta chọn được hệ trục tọa độ phù hợp thì việc giải quyết bài toán sẽ tính toán đơn giản hơn.

Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: Giải quyết bài toán.

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Trong các bước trên thì bước 1 là bước quan trọng, vì nó quyết định đến việc tính toán cho các bước tiếp theo. Sau đây là một số cách chọn hệ trục cho một số mô hình không gian mà chúng ta thường gặp.

1) Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

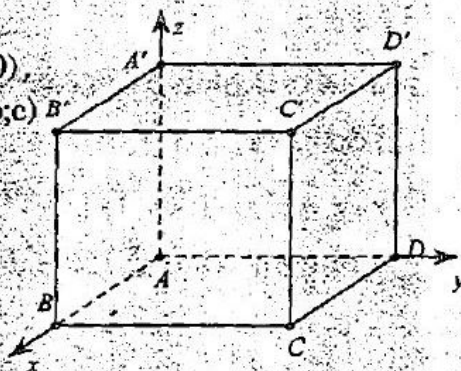
Với hình lập phương: Chọn hệ trục tọa độ sao cho : $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; a)$, $B'(a; 0; a)$, $C'(a; a; a)$, $D'(0; a; a)$

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

$A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; b; 0)$, $D(0; b; 0)$,

$A'(0; 0; c)$, $B'(a; 0; c)$, $C'(a; b; c)$, $D'(0; b; c)$



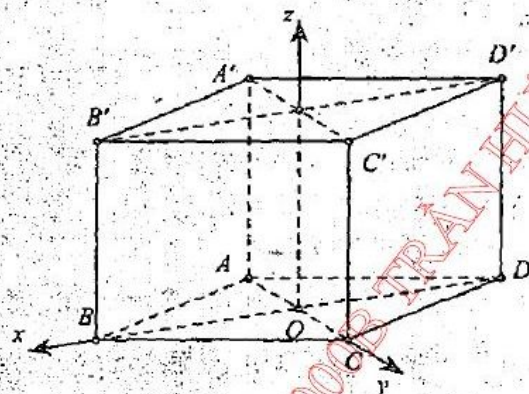
Chú ý: Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

2) Với hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho: Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$. Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

Nếu $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì $A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$

$D\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right), A'\left(0; -\frac{a}{2}; c\right), B'\left(\frac{b}{2}; 0; c\right), C'\left(0; \frac{a}{2}; c\right), D'\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right)$



Chú ý: Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm $AC, B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh $AC, A'C'$.

3) Hình chóp đều

• Hình chóp tam giác đều $S.ABC, AB = a, SH = h,$

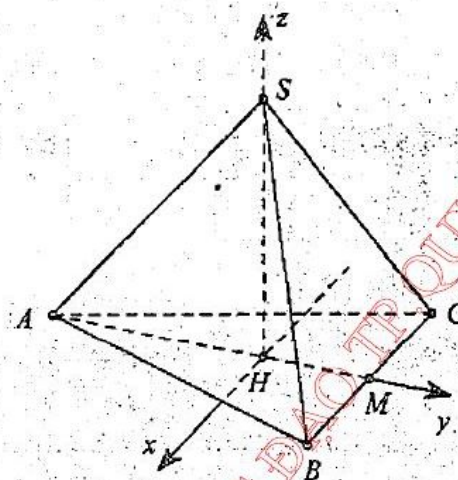
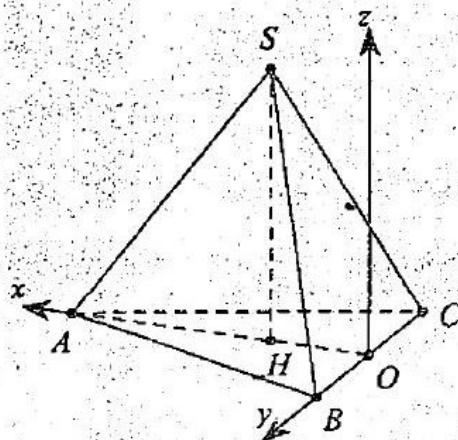
Cách 1: Ta chọn hệ tọa độ sao cho O là trung điểm $BC, A \in Ox, B \in Oy$.

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; h\right)$

Cách 2: Ta chọn hệ tọa độ sao cho $O \equiv H, Ox \parallel BC, A \in Oy, S \in Oz$.

Khi đó tọa độ các đỉnh là:

$H(0; 0; 0), S(0; 0; h), A\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$



Chú ý: Tùy thuộc vào giả thiết của bài toán mà ta chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

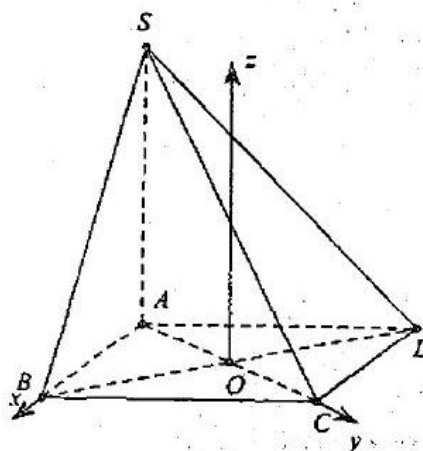
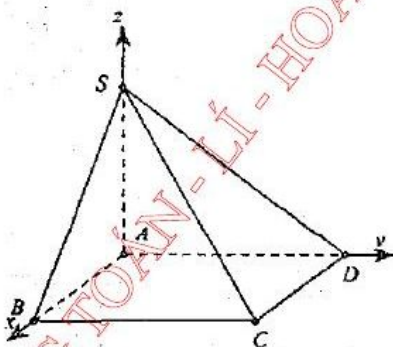
4) Hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, $SA = h$

- Nếu đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $S \in Oz$.

Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, $D(0;b;0)$, $S(0;0;h)$

- Nếu đáy là hình thoi có $AC = a$, $AD = b$, ta chọn hệ trục sao cho O là tâm của đáy, $B \in Ox$, $C \in Oy$ và $Oz \parallel SA$.

Khi đó $A\left(0; -\frac{b}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{b}{2}; 0\right)$, $D\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; -\frac{b}{2}; h\right)$



Chú ý: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$

- Nếu đáy ABC là tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục hoàn toàn tương tự như hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật.
- Nếu đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC.

5) Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$

Đường cao $SH = h$ của tam giác SAB là đường cao của hình chóp.

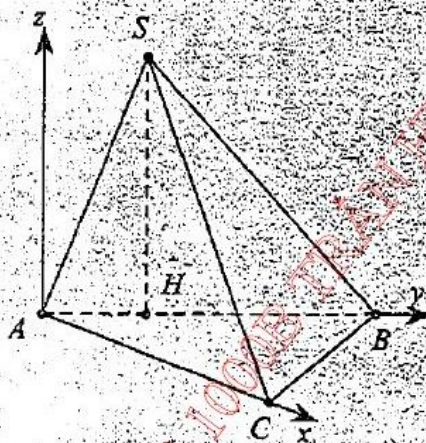
Nếu tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox, Oz \parallel SH$.

Khi đó $A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C(b; 0; 0)$ $AH = c$

$\Rightarrow H(0; c; 0), S(0; c; h)$.

Chú ý:

- Nếu vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$
- Nếu tam giác ASB cân tại S , $\triangle ABC$ cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$.



Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải. Sau đây chúng ta sẽ đi xét một số ví dụ minh họa.

7.2. Các ví dụ minh họa

I. Nhóm các bài toán về lăng trụ

Ví dụ 3.7.1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông,

$AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

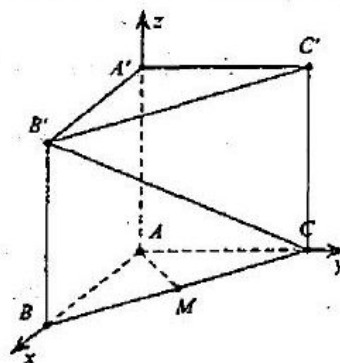
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh là:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(0; a; 0),$$

$$A'(0; 0; a\sqrt{2}), B'(a; 0; a\sqrt{2})$$



$$C'(0; a; a\sqrt{2}), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right).$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AC} = (0; a; 0), \overrightarrow{B'C} = (-a; a; a\sqrt{2})$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

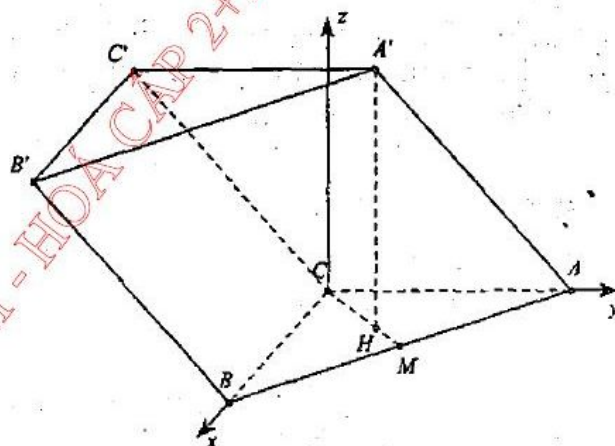
$$\text{Vậy } d(AM, B'C) = \frac{|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}]\|} = \frac{a}{2}$$

Ví dụ 3.7.2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a .

(Đề thi ĐH Khối B – 2009).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC

Đặt $BC = x, A'H = y; x, y > 0$ suy ra $AC = AB \cdot \cot 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Tọa độ các đỉnh là:

$$C(0; 0; 0), B(x; 0; 0), A\left(0; \frac{x}{\sqrt{3}}; 0\right), H\left(\frac{x}{3}; \frac{x}{3\sqrt{3}}; 0\right), B'\left(\frac{x}{3}; \frac{x}{3\sqrt{3}}; y\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{2x}{3}; \frac{x}{3\sqrt{3}}; y\right)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{|\overrightarrow{BB'} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{BB'}| \cdot |\vec{k}|} = \sin 60^\circ \\ |\overrightarrow{BB'}| = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a \\ \sqrt{\frac{13}{27}x^2 + y^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \frac{27a^2}{52} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{81a^2}{104\sqrt{3}}$$

Vậy thể tích khối chóp $A' \cdot ABC$ là:

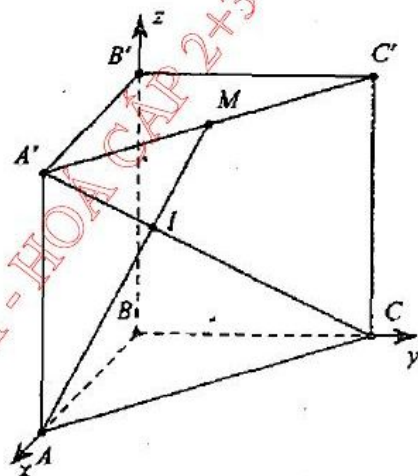
$$V_{A' \cdot ABC} = V_{B' \cdot ABC} = \frac{1}{3} y \cdot \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{27a^2}{104\sqrt{3}} = \frac{9a^3}{208}$$

Ví dụ 3.7.3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC)

(Đề thi ĐH Khối D - 2009).

Lời giải.

Đặt $BC = x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các điểm là:

$$B(0; 0; 0), A(a; 0; 0), C(0; x; 0), B'(0; 2a; 0), A'(a; 0; 2a), C'(0; x; 2a)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{A'C} = (-a; x; -2a) \Rightarrow A'C^2 = a^2 + x^2 + (2a)^2 = (3a)^2 \Rightarrow x = 2a$$

$$\text{Trung điểm } M\left(\frac{a}{2}; a; 2a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{2}; a; 2a\right)$$

$$\text{Phương trình AM: } \begin{cases} x = a - t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases} \Rightarrow I(a - t; 2t; 4t) \Rightarrow \overrightarrow{A'I} = (-t; 2t; 4t - 2a)$$

$$\text{Vì } I \in A'C \Rightarrow \frac{-t}{-a} = \frac{2t}{2a} = \frac{4t - 2a}{-2a} \Rightarrow t = \frac{a}{3} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{4a}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BI} = \left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{4a}{3}\right), \overrightarrow{CI} = \left(\frac{2a}{3}; -\frac{4a}{3}; \frac{4a}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{CI}] = \left(\frac{8a^2}{3}; 0; -\frac{4a^2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{4a}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{CI}] \cdot \overrightarrow{AI} = -\frac{8a^3}{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp IABC: } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{CI}] \cdot \overrightarrow{AI}| = \frac{4a^3}{9}$$

Ta có $\vec{n} = (2; 0; -1)$ là VTPT của (IBC), phương trình mặt phẳng (IBC): $2x - z = 0$

$$\text{Vậy } d(A, (IBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Ví dụ 3.7.4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a

(Đề thi ĐH khối B – 2010).

Lời giải.

Đặt $AA' = x, x > 0$. Chọn hệ trục như hình vẽ

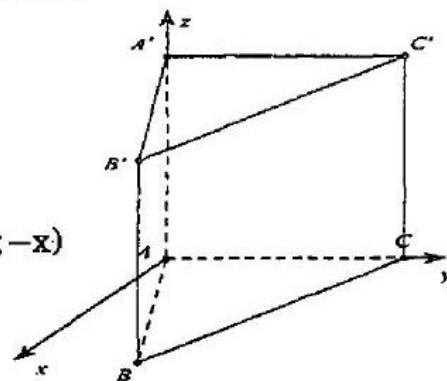
Tọa độ các điểm: $A(0; 0; 0), C(0; a; 0)$,

$$A'(0; 0; x), C'(0; a; x), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{A'B} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; -x\right), \overrightarrow{A'C} = (0; a; -x)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = \left(\frac{ax}{2}; \frac{ax\sqrt{3}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nên $\vec{n} = (x; x\sqrt{3}; a\sqrt{3})$ là VTPT của $(A'BC)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của (ABC)



Theo đề bài: $\frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ \Rightarrow 2\sqrt{3}a = \sqrt{4x^2 + 3a^2} \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$.

Thể tích lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'} = x \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$, ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = IG^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = -\frac{a}{12} \end{cases}$$

Tâm $I\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{12}\right)$, bán kính $R = IA = \frac{7a}{12}$.

Ví dụ 3.7.5. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

$AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

(Đề thi ĐH Khối B – 2011).

Lời giải.

Gọi H là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H = x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ

Tọa độ các điểm:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a\sqrt{3}; 0), C(a; a\sqrt{3}; 0), H\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), A_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; x\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AA_1} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; x\right), \overrightarrow{AD} = (0; a\sqrt{3}; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}] = \left(ax\sqrt{3}; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \vec{n} = (2x; 0; a) \text{ là VTPT của } (A_1AD)$$

Và $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ \Rightarrow 2a = \sqrt{4x^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = x \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$$

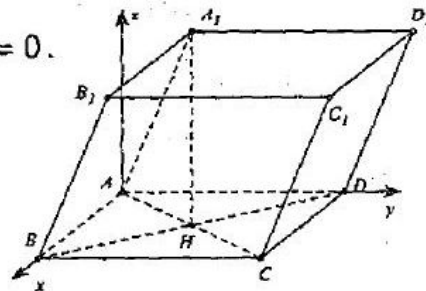
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A_1B} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right), \overrightarrow{A_1D} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1D}] = (a\sqrt{3}x; ax; 0)$$

$$\text{Phương trình } (A_1BD): x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } d(B_1, (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 3.7.6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a

(Đề thi ĐH Khối D – 2012).

Lời giải.

Đặt $AB = x$, $AA' = y$; $x, y > 0$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh

$$A(0; 0; 0), B(x; 0; 0), C(x; x; 0), D(0; x; 0),$$

$$A'(0; 0; y), B'(x; 0; y), C'(x; x; y), D'(0; x; y)$$

Vì tam giác $A'AC$ vuông cân và $A'C = a$ nên ta có:

$$\begin{cases} A'A = AC \\ A'C = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x\sqrt{2} \\ 2x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x; 0; 0)$, $\overrightarrow{AB'} = (x; 0; y)$, $\overrightarrow{AC'} = (x; x; y)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB'} = (0; -xy; 0)$, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB'}) \cdot \overrightarrow{AC'} = -x^2y$

Thể tích khối tứ diện $ABB'C'$:

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB'}) \cdot \overrightarrow{AC'} \right| = \frac{1}{6} x^2 y = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$$

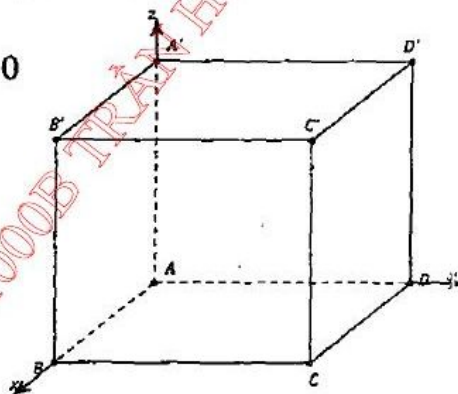
Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; x; 0)$, $\overrightarrow{BD'} = (-x; x; y) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD'} = (xy; 0; -x^2)$

$\Rightarrow \vec{n} = (\sqrt{2}; 0; -1)$ là VTPT của mặt phẳng (BCD')

Phương trình (BCD') : $\sqrt{2}x - z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$

Vậy khoảng cách từ A đến (BCD') là:

$$d(A, (BCD')) = \frac{\left| \frac{a\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{2+1}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



II. Các bài toán về hình chóp

Ví dụ 3.7.7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$,

$AD = \sqrt{2}a$, $SA = a$ và vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC . Gọi I là giao điểm của BM, AC . Chứng minh $mp(SAC)$ vuông góc với $mp(SMB)$. Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

(Đề thi ĐH Khối B – 2006).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a\sqrt{2}; 0), S(0; 0; a), C(a; a\sqrt{2}; 0),$$

$$M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{BM} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0)$

Phương trình BM: $\begin{cases} x = a - 2t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 0 \end{cases}$, phương trình AC: $\begin{cases} x = t' \\ y = \sqrt{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được giao điểm $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AS} = (0; 0; a), \overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

$\Rightarrow \vec{n}_1 = (\sqrt{2}; -1; 0)$ là VTPT của (SAC)

$\overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

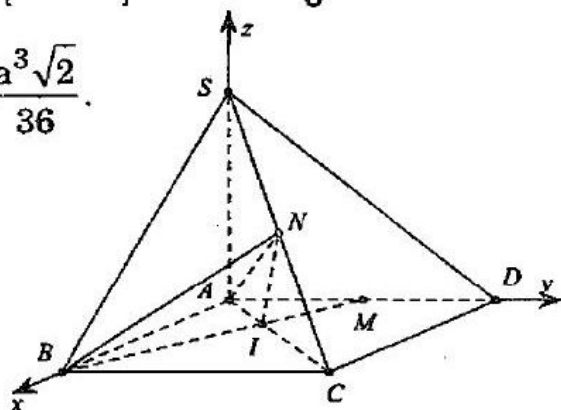
$\Rightarrow \vec{n}_2 = (1; \sqrt{2}; 1)$ là VTPT của (SMB).

Vì $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6}; \frac{a^2}{6}; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Vậy $V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$



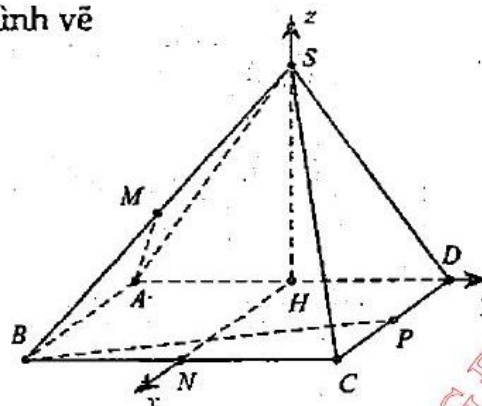
Ví dụ 3.7.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

(Đề thi ĐH Khối A – 2007).

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AD $\Rightarrow SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta có tọa độ các đỉnh:

$$H(0; 0; 0), A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), N(a; 0; 0), B\left(a; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

$$C\left(a; \frac{a}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow AM \perp BP.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{CN} = \left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{CP} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] = \left(0; 0; -\frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Vậy } V_{CMNP} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] \cdot \overrightarrow{CM}| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Ví dụ 3.7.9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC

(Đề thi ĐH Khối B – 2007).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SO = h$ và gọi I là trung điểm SA.

Ta có tọa độ các đỉnh là:

$$A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

$$S(0;0;h), I\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right),$$

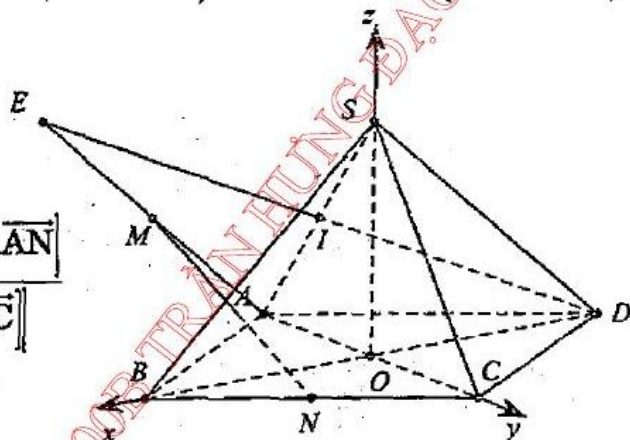
$$E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; h\right), M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{h}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; -\frac{h}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (a\sqrt{2}; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$$

$$\overrightarrow{AC} = (0; a\sqrt{2}; 0), \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] = \left(\frac{ah\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{a^2 h}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } d(MN, AC) &= \frac{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN}}{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}]} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



Ví dụ 3.7.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$,

$BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}a$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$

(Đề thi ĐH Khối D – 2007).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0), S(0;0;a\sqrt{2}), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (-a; 0; a\sqrt{2})$, phương trình

$$\text{SB: } \begin{cases} x = a - t \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2}t \end{cases} \Rightarrow H(a - t; 0; \sqrt{2}t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (a - t; 0; \sqrt{2}t)$$

$$\text{Mà } AH \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow -a + t + 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{3} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$$

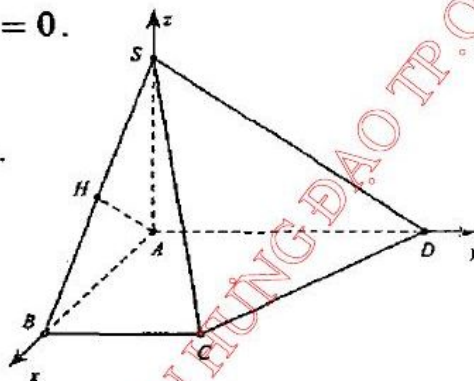
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SC} = (a; a; -a\sqrt{2}), \overrightarrow{CD} = (a; -a; 0)$$

Suy ra $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow SC \perp CD \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại C

$$[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}] = (-a^2\sqrt{2}; -a^2\sqrt{2}; -2a^2) \Rightarrow \vec{n} = (1; 1; \sqrt{2}) \text{ là VTPT của } (SCD)$$

$$\text{Phương trình (SCD): } x + y + \sqrt{2}z - 2a = 0.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{\left|\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} - 2a\right|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{a}{3}.$$



Ví dụ 3.7.11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$,

$SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

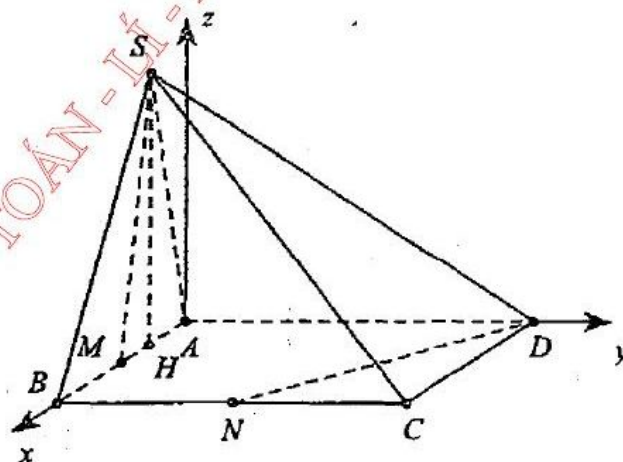
(Đề thi ĐH Khối B – 2008).

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$\text{Ta có: } SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M(a;0;0), N(2a;a;0).$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.BMDN: V = \frac{1}{3}SHS_{BMDN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a; -a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN} = a^2$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{DN}) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{a^2}{a \cdot \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

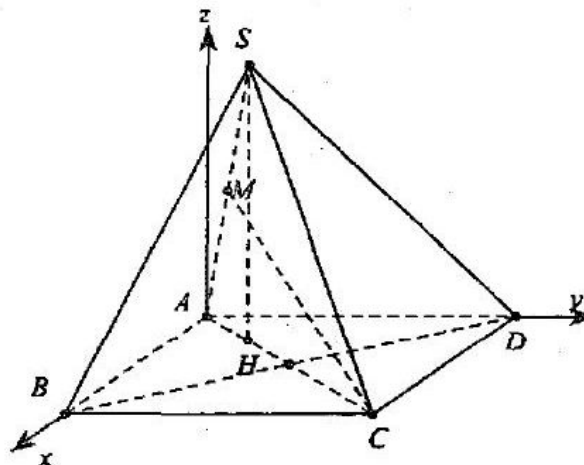
Ví dụ 3.7.12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .

(Đề thi ĐH khối D - 2010).

Lời giải.

$$\text{Ta có } AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right), S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$$

Gọi N là trung điểm của

$$SA \Rightarrow N\left(\frac{a}{8}; \frac{a}{8}; \frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{7a}{8}; -\frac{7a}{8}; \frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{SN} = \left(-\frac{a}{8}; -\frac{a}{8}; -\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SN} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow CN \perp SA \Rightarrow N \equiv M$$

Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{3a}{4}; -\frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{3a}{4}; \frac{3a}{4}; -\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

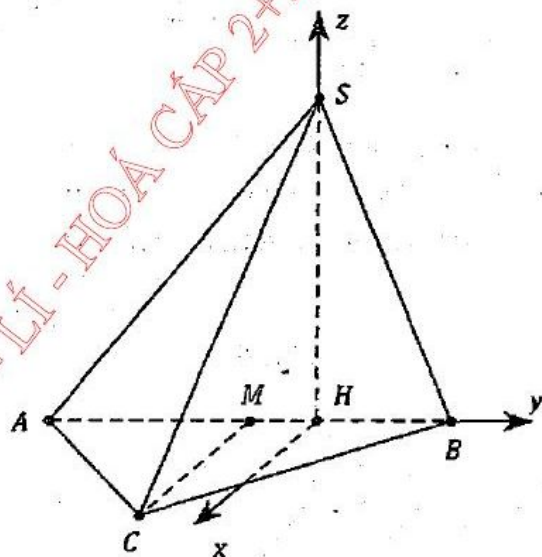
$$\Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{a^2\sqrt{14}}{4}; 0; \frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SM} = -\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$$

$$\text{Vậy } V_{S.MBC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{SM}| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$

Ví dụ 3.7.13. Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp SABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SH = x$



Tọa độ các điểm: $H(0; 0; 0), A(0; -\frac{2a}{3}; 0), B(0; \frac{a}{3}; 0), S(0; 0; x)$

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $MH = \frac{a}{6}, CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$M\left(0; -\frac{a}{6}; 0\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{6}; 0\right)$$

Ta có $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{6}; -x\right)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của (ABC) .

$$\text{Suy ra } \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{k}|}{SC \cdot |\vec{k}|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \frac{7a^2}{9}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 3x^2 + \frac{7a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$:

$$V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Ta có: $\overrightarrow{SA} = \left(0; -\frac{2a}{3}; -\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (0; a; 0)$

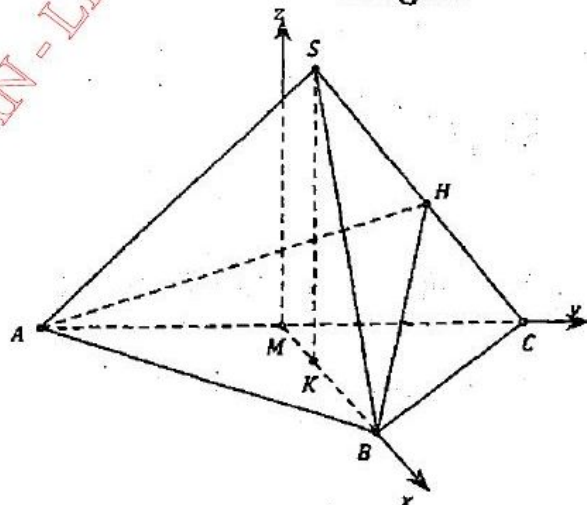
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{a^2\sqrt{21}}{6}; -\frac{a^2\sqrt{7}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow (\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{|(\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{BC}|} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

Ví dụ 3.7.14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc với mp (ABH) . Tính thể tích khối chóp $(SABH)$

(Đề thi ĐH Khối B – 2012).

Lời giải.



Gọi K là tâm của đáy, M là trung điểm cạnh AC.

$$\text{Ta có: } AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có, tọa độ các điểm:

$$A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), K\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \overrightarrow{SC} &= \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{33}}{3}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{6}(-1; \sqrt{3}; -2\sqrt{11}) \\ \Rightarrow \overrightarrow{u_{SC}} &= (-1; \sqrt{3}; -2\sqrt{11}) \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình SC: } \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{a}{2} + \sqrt{3}t \\ z = -2\sqrt{11}t \end{cases} \Rightarrow H\left(-t; \frac{a}{2} + \sqrt{3}t; -2\sqrt{11}t\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AH} = (-t; a + \sqrt{3}t; -2\sqrt{11}t).$$

$$\text{Vì } AH \perp SC \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_{SC}} = 0 \Leftrightarrow t + a\sqrt{3} + 3t + 44t = 0 \Rightarrow t = -\frac{a\sqrt{3}}{48}.$$

$$\text{Nên } H\left(\frac{a\sqrt{3}}{48}; \frac{7a}{16}; \frac{a\sqrt{33}}{24}\right).$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AH} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{48}; \frac{15a}{16}; \frac{a\sqrt{33}}{24}\right), \quad \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AB} &= \left(-\frac{a^2\sqrt{33}}{48}; \frac{a^2\sqrt{11}}{16}; -\frac{11a^2\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{a^2\sqrt{33}}{48}(-1; \sqrt{3}; -2\sqrt{11}) = \frac{a^2\sqrt{33}}{48} \overrightarrow{u_{SC}} \end{aligned}$$

Do đó $SC \perp (ABH)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{33}}{3}\right) \text{ nên } (\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AS} = -\frac{7a^3\sqrt{11}}{16}.$$

Vậy thể tích khối chóp S.ABH là:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AS}| = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}.$$

Ví dụ 3.7.15. Cho hai đường thẳng Δ, Δ' chéo nhau và vuông góc với nhau nhận AB làm đường vuông góc chung ($A \in \Delta, A' \in \Delta'$). Gọi M, N là các điểm di chuyển trên Δ và Δ' sao cho $MN = AM + BN$.

- 1) Chứng minh rằng tích $AM \cdot BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.
- 2) Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB .

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), với $O \equiv A$, trục Oz chứa AB , trục Ox chứa đường thẳng a và trục $Oy \parallel b$.

Đặt $AB = h$, $AM = a$, và $AN = b$, ($h, a, b > 0$).

Tọa độ các điểm $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; h)$, $M(a; 0; 0)$, $N(0; b; h)$.

Vì $MN = AM + BN$ nên $\sqrt{h^2 + a^2 + b^2} = a + b \Leftrightarrow 2ab = h^2$.

- 1) Ta có: $AM \cdot BN = a \cdot b = \frac{h^2}{2}$, $\overrightarrow{AB}(0; 0; h)$, $\overrightarrow{AM}(a; 0; 0)$, $\overrightarrow{AN}(0; b; h)$

suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (0; ah; 0)$.

Thể tích khối tứ diện $ABMN$ là:

$$V_{ABMN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] \cdot \overrightarrow{AN}| = \frac{1}{6} abh = \frac{1}{12} h^3.$$

Vì $h = AB$ không đổi nên tích $AM \cdot BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.

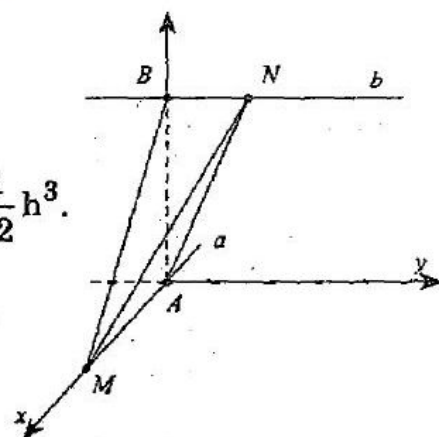
- 2) Gọi trung điểm của AB là $I(0; 0; \frac{h}{2})$.

Ta có $\overrightarrow{MN}(-a; b; h)$, $\overrightarrow{IM}(a; 0; \frac{h}{2})$ nên $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IM}] = (-\frac{hb}{2}; \frac{ha}{2}; -ab)$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng MN là:

$$\begin{aligned} d(I, MN) &= \frac{|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IM}]|}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{\sqrt{h^2b^2 + h^2a^2 + 4a^2b^2}}{4(a^2 + b^2 + h^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2ab^3 + 2ba^3 + 4a^2b^2}}{4(a^2 + b^2 + h^2)} = \sqrt{\frac{ab}{2}} = \frac{h}{2} = \frac{AB}{2}. \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB .



7.3. Bài tập

Bài 3.7.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

- 1) Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$.
- 2) M, N là hai điểm di động trên các đoạn thẳng $AC, B'D'$ sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{B'N}{B'C'}$ (M, N không trùng với hai đầu điểm mút của các đoạn thẳng). Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Bài 3.7.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2, AD=4, AA'=6$.

Các điểm M, N thỏa mãn $\overline{AM} = m\overline{AD}, \overline{BN} = m\overline{BB'}$ ($0 \leq m \leq 1$). Gọi I, K là trung điểm của $AB, C'D'$.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến $(A'BD)$.
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính m để diện tích tứ giác $MINK$ lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 3.7.3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các điểm cạnh AA', CC' sao cho $\overline{AM} = x\overline{AA'}, \overline{C'N} = x\overline{CC'}$ ($0 < x < 1$).

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Đặt $AA' = y$. Tìm x và y theo a để $B'MDN$ là hình vuông.

Bài 3.7.4. Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC .

Tính theo a thể tích khối chóp $A'ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$.

(Đề thi ĐH khối A – 2008).

Bài 3.7.5. Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$, có đáy $AB = a, AC = 2a$,

$\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB' , biết hai mặt phẳng (MAC) và $(MA'C')$ vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$.

Bài 3.7.6. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ (AC là đường chéo), $ABEF$ (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn

các điều kiện $AB = a, AD = AF = a\sqrt{2}$, đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF . Gọi HK là đường vuông góc chung của AC, BF (H thuộc AC, K thuộc BF).

- 1) Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF . Tính tỷ số $\frac{DI}{DF}$.
- 2) Tính độ dài đoạn HK .
- 3) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABHK$.

Bài 3.7.7. Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$ và $BC = 5\text{cm}$.

- 1) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) . Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên mặt phẳng (BCD) .
- 2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BD, BC . Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN .

Bài 3.7.8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a . Gọi M, N là trung điểm SB, SC . Biết (AMN) vuông góc với (SBC) .

- 1) Tính theo a diện tích $\triangle AMN$,
- 2) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BN .

Bài 3.7.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC .

- 1) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.AMN$,
- 2) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM .

Bài 3.7.10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

(Trích đề thi ĐH khối A – 2011)

Bài 3.7.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$, với a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 2abc$. Các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

- 1) Chứng minh rằng khi a, b, c thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định.
- 2) Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R .

3) Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$. Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

Bài 3.7.12. Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = b$ và M là trung điểm của BC . Trên đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P) lấy điểm S ($S \neq M$). Mặt phẳng (Q) chứa BC và vuông góc với (SAB) , cắt SA tại D , biết thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{ab^2\sqrt{2}}{24}$.

- 1) Tính độ dài của đoạn SM ,
- 2) Tìm $E \in SB$ sao cho A, B, C, D, E nằm trên một mặt cầu. Tìm bán kính mặt cầu đó.

Bài 3.7.13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho

$$\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}, \quad \frac{SN}{SC} = k, \quad 0 < k < 1.$$

- 1) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$,
- 2) Tìm k để tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

Bài 3.7.14. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông $ABCD$. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại A , ta lấy điểm S ($S \neq A$). Một mặt phẳng (β) đi qua A , vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' .

- 1) Chứng minh rằng khi S thay đổi trên d thì mặt phẳng (β) luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C, C', D, D' luôn nằm trên một mặt cầu cố định.
- 2) Cho góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính tỉ số thể tích giữa hai hình chóp $S.ABCD$ và $S.AB'C'D'$.

Bài 3.7.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) .

- 1) Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$
- 2) Tính khoảng cách và cosin của góc giữa DM và CN .

Bài 3.7.16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = AD = 2a$; $CB = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Biết hai mặt

phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

(Trích đề thi ĐH Khối A – 2009).

Bài 3.7.17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

(Trích đề thi ĐH khối A – 2010).

Bài 3.7.18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh 1cm, các cạnh bên SA, SB, SC có độ dài cùng bằng 1cm. Tính độ dài cạnh SD sao cho hình chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

Bài 3.7.19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều ABCD có $AB = BC = CD = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M chia đoạn SB theo tỷ số -3 , điểm I chia đoạn DS theo tỷ số $-\frac{4}{3}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.

- 1) Chứng minh N là trung điểm của SC.
- 2) Chứng minh $SD \perp (AMI)$ và AMNI thuộc một đường tròn.
- 3) Tính khoảng cách từ trung điểm của AD đến mặt phẳng (AMNI).

Bài 3.7.20. Tứ diện đều ABCD có tâm là S và có độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A, B, C, D trên đường thẳng nào Δ đi qua S. Tìm tất cả các vị trí của đường thẳng Δ sao cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất.

$$P = SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4.$$

Hướng dẫn giải

Bài 3.7.1. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

- 1) Ta có: $A(0; 0; 0), A'(0; 0; a), B(0; a; 0), B'(0; a; a),$
 $C(a; a; 0), C'(a; a; a), D(a; 0; 0), D'(a; 0; a)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{B'D'} = (a; -a; 0), \overrightarrow{A'B} = (0; a; -a), \overrightarrow{BB'} = (0; 0; a).$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}] = (a^2; a^2; a^2) \text{ nên } [\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}] \cdot \overrightarrow{BB'} = a^3 \neq 0$$

Vậy ba vector $\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau.

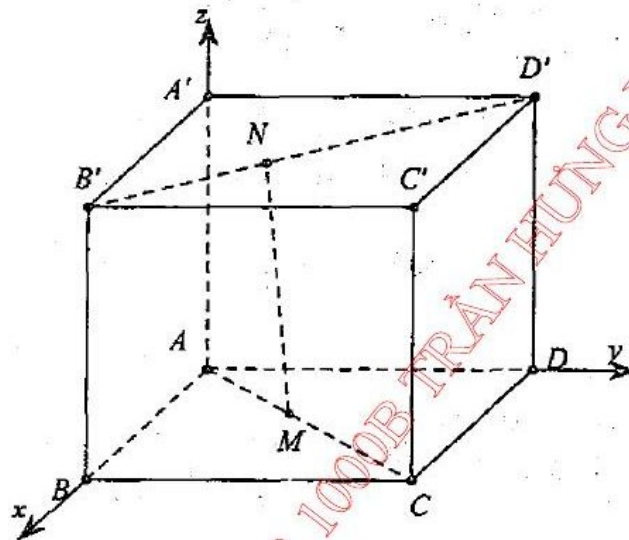
$$\text{Ta có: } d(B'D', A'B) = \frac{|[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}] \cdot \overrightarrow{BB'}|}{|[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}]|}$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + a^4}} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2) Đặt $\frac{AM}{AC} = \frac{B'N}{B'D'} = k \Rightarrow \overline{AM} = k\overline{AC}, \overline{B'N} = k\overline{B'D'}$.

Do đó $M(ka; ka; 0), N(ka; a - ka; a)$ suy ra $\overline{MN} = (0; a - 2ka; a)$

Vì $\overline{MN} \cdot \vec{i} = 0$ nên luôn song song với mặt phẳng (Oyz) cố định. Ta có đpcm.



Bài 3.7.2. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó tọa độ các điểm là:

$A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 4; 0), C(2; 4; 0),$

$A'(0; 0; 6), B'(2; 0; 6), C'(2; 4; 6), D'(0; 4; 6)$

$M(0; 4m; 0), N(2; 0; 6m), I(1; 0; 0), K(1; 4; 6).$

1) Ta có $\overline{A'B} = (2; 0; -6), \overline{BD} = (-2; 4; 0) \Rightarrow [\overline{A'B}, \overline{BD}] = (24; 12; 8)$

Suy ra $\vec{n} = \frac{1}{4}[\overline{A'B}, \overline{BD}] = (6; 3; 2)$ là VTPT của mặt phẳng $(A'BD)$

Do đó phương trình $(A'BD)$ là: $6x + 3y + 2z - 12 = 0$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là:

$$d(A, (A'BD)) = \frac{12}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{12}{7}.$$

2) Nếu $m = 0$, khi đó M, N, I, K cùng thuộc mặt phẳng (ABK)

Ta xét với $m \neq 0$.

Ta có $\overline{IM} = (-1; 4m; 0), \overline{IN} = (1; 0; 6m)$, suy ra

$$[\overline{IM}, \overline{IN}] = (24m^2; 6m; -4m)$$

Do đó $\vec{n} = (12m; 3; -2)$ là VTPT của mặt phẳng (IMN)

Suy ra phương trình (IMN) là: $12mx + 3y - 2z - 12m = 0$.

Vì tọa độ điểm K thỏa mãn phương trình của mặt phẳng (IMN) nên bốn điểm M, N, I, K đồng phẳng.

Chú ý: ta có thể sử dụng kết quả $[\vec{IM}, \vec{IN}] \cdot \vec{IK} \neq 0$ để chứng minh bốn điểm M, N, I, K không đồng phẳng.

$$3) \text{ Ta có } S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} \|\vec{IM}, \vec{IN}\| = m\sqrt{144m^2 + 13}$$

$$\vec{MN} = (2; -4m; 6m), \vec{MK} = (1; 4 - 4m; 6)$$

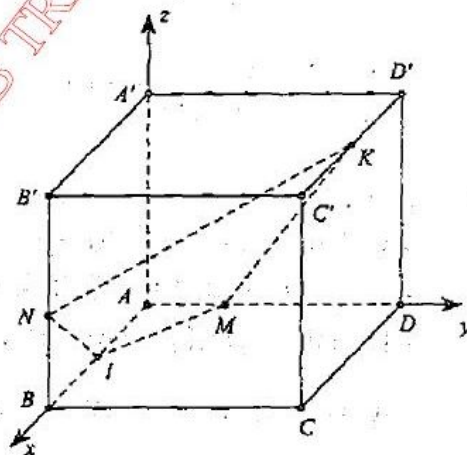
$$\Rightarrow [\vec{MN}, \vec{MK}] = (24m^2 - 48m; 6m - 12; 8 - 4m)$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2} \|\vec{MN}, \vec{MK}\| = (2 - m)\sqrt{144m^2 + 13}$$

$$\text{Do đó } S_{\triangle MKN} = S_{\triangle IMN} + S_{\triangle MNK} = 2\sqrt{144m^2 + 13} \geq 2\sqrt{13}$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.



Bài 3.7.3. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Vì góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều, do đó $BD = a, AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $AA' = y$

Suy ra tọa độ các điểm là:

$$A\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$A'\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; y\right), B'\left(\frac{a}{2}; 0; y\right), C'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; y\right), D'\left(-\frac{a}{2}; 0; y\right), M\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; xy\right)$$

và $N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; y - xy\right)$.

1) Ta có $\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; xy - y\right)$, $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; y - xy\right)$

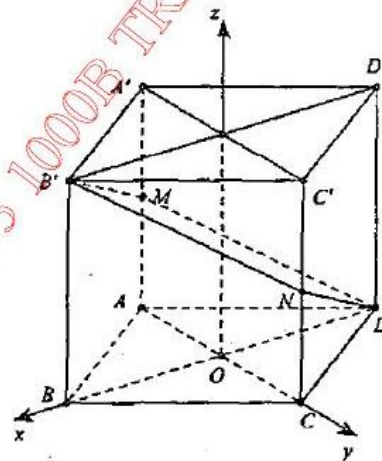
Suy ra $\overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{B'M} \Rightarrow DN \parallel B'M$ hay bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

2) Ta có $\overrightarrow{B'N} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -xy\right)$. Theo chứng minh trên thì $DNB'M$ là

hình bình hành, nên nó là hình vuông khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{B'M} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0 \\ \overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'N} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a^2}{2} - xy(xy - y) = 0 \\ (xy - y)^2 + a^2 = x^2y^2 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(y - xy) = \frac{a^2}{2} \\ y^2(2x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = a\sqrt{2} \end{cases}$$



Bài 3.7.4. Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là trung điểm đoạn BC

Ta có tọa độ các đỉnh là: $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(0; a\sqrt{3}; 0)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Vì $AM = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow MA' = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = a\sqrt{3}$, suy ra

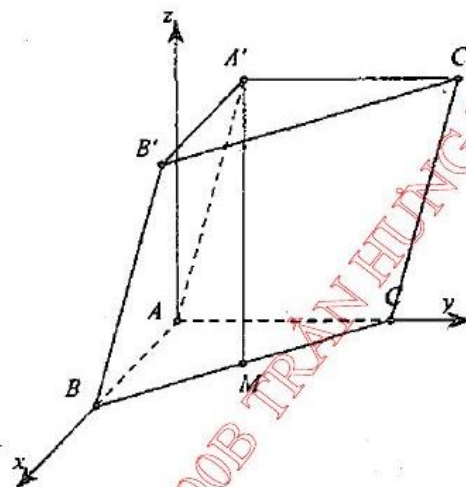
$A'\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow C'\left(\frac{a}{2}; \frac{3a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$

$$\text{Thể tích khối chóp } A'.ABC: V = \frac{1}{3} A'M S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3} \right), \overrightarrow{B'C'} = (-a; a\sqrt{3}; 0) \text{ nên suy ra}$$

$$\cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'C'}|}{|\overrightarrow{AA'}| |\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{4}.$$



Bài 3.7.5. Đặt $AA' = 2x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có $A(0; 0; 0), C(0; 2a; 0), A'(0; 0; 2x), C'(0; 2a; 2x)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục Ox, Oy, suy ra

$$AH = AB \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AK = BH = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó } B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 2x\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; x\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; x\right), \overrightarrow{AC} = (0; 2a; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] = (-2ax; 0; a^2\sqrt{3})$$

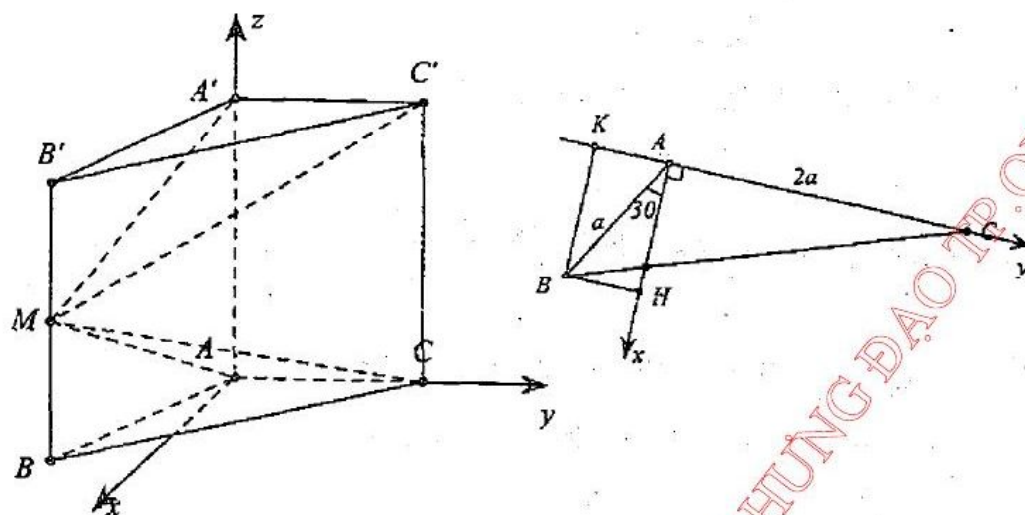
$$\Rightarrow \vec{n}_1 = (2x; 0; -a\sqrt{3}) \text{ là VTPT của mặt phẳng (MAC)}$$

$$\overrightarrow{A'M} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; -x\right), \overrightarrow{A'C'} = (0; 2a; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'C'}] = (2ax; 0; a^2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \vec{n}_2 = (2x; 0; a\sqrt{3}) \text{ là VTPT của mặt phẳng (MA'C')}$$

Vì $(MAC) \perp (MA'C')$ nên

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$$



1) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = \frac{3a^3}{2}$$

2) Ta có $\vec{CC'} = (0; 0; a\sqrt{3})$, $\vec{BC} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{5a}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow [\vec{CC'}, \vec{BC}] = \left(-\frac{5a^2\sqrt{3}}{2}; -\frac{3a^2}{2}; 0\right)$$

$\Rightarrow \vec{n}_3 = (5; \sqrt{3}; 0)$ là VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{28}} = \frac{5\sqrt{14}}{28}$$

Bài 3.7.6. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Tọa độ các điểm là

$$A \equiv O(0; 0; 0), B(0; 0; a), D(0; a\sqrt{2}; 0), C(0; a\sqrt{2}; a).$$

Gọi $F(x; y; 0)$, $x > 0$. Ta có $AF^2 = x^2 + y^2 = 2a^2$.

Mặt khác $AC \perp BF$ và $\vec{AC}(0; a\sqrt{2}; a)$, $\vec{BF}(x; y; -a)$ nên

$$\vec{AC} \cdot \vec{BF} = 0 \Leftrightarrow y \cdot a\sqrt{2} - a^2 = 0$$

$$\text{Do đó } y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \text{ hay } F\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), E\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; a\right).$$

- 1) Mặt phẳng (α) chứa AC và song song với BF có phương trình

$$\sqrt{3}x - y + \sqrt{2}z = 0.$$

$$\text{Đường thẳng DF: } \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = a\sqrt{2} - t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì thế } DF \cap (\alpha) = I \text{ nên } I \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0 \right).$$

Do đó $\frac{DI}{DF} = \frac{1}{2}$, hay I là trung điểm của DF.

- 2) Đường thẳng AC và BF có phương trình là

$$\text{AC: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2}t \\ z = t \end{cases}, \text{ BF: } \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \\ z = a - \sqrt{2}t \end{cases}$$

Vì vậy $H(0; \sqrt{2}m; m)$, $K(\sqrt{3}n; n; a - \sqrt{2}n)$ nên

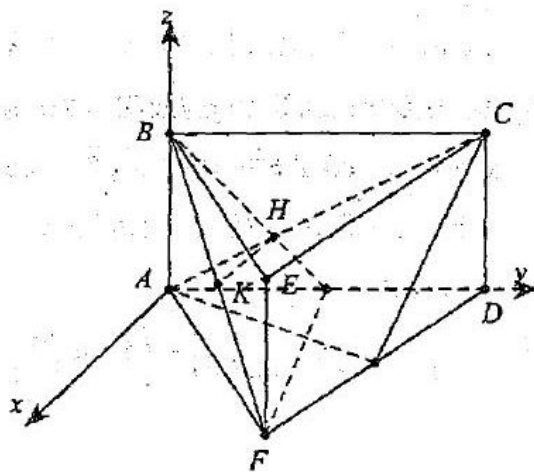
$$\overrightarrow{HK} = (\sqrt{3}n; n - \sqrt{2}m; a - \sqrt{2}n - m)$$

Mà HK là đường vuông góc chung nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}} \cdot \overrightarrow{HK} = 0 \\ \overrightarrow{u_{BF}} \cdot \overrightarrow{HK} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}n - 2m + a - \sqrt{2}n - m = 0 \\ 3n + n - \sqrt{2}m - \sqrt{2}a + 2n + \sqrt{2}m = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có: $m = \frac{a}{3}$, $n = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \overrightarrow{HK} \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}; -\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a}{3} \right)$

Vậy độ dài đoạn HK là $HK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



3) Ta có $\overline{AB}(0;0;a)$, $\overline{AH}\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a}{3}\right)$, $\overline{AK}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{2a}{3}\right)$,
 $\overline{HK}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}; -\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a}{3}\right)$, $\overline{BH}\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{2a}{3}\right)$.

Thể tích khối tứ diện ABHK là: $V_{ABHK} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AH}] \cdot \overline{AK}| = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Diện tích các mặt

$$S_{AHK} = \frac{a^2}{6}, S_{BHK} = \frac{a^2}{6}, S_{ABH} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}, S_{ABK} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{a^2(1+\sqrt{2})}{3}$$

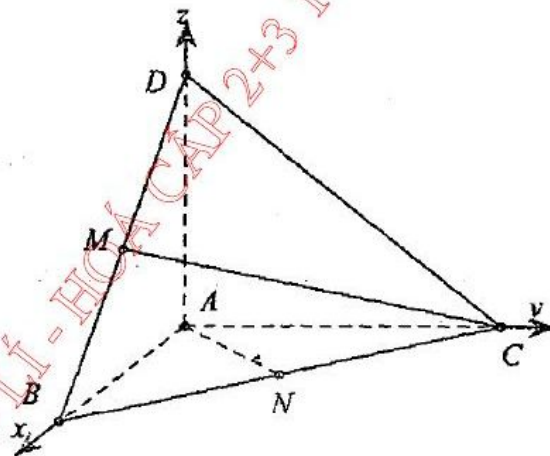
Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABHK là:

$$r = \frac{3V_{ABHK}}{S_{tp}} = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6}$$

Bài 3.7.7.1) Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.

Chọn hệ trục tọa độ Đécac vuông góc Oxyz như sau hình vẽ

Suy ra $O \equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.



Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$(BCD): \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

$$\text{Do đó: } d(A, (BCD)) = \frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Ta có $AH \perp (BCD)$ nên phương trình AH :
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow H(4t; 3t; 3t)$$

Mà $H \in (BCD)$ nên $4.4t + 3.3t + 3.3t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{17}$

Vậy $H\left(\frac{24}{17}; \frac{18}{17}; \frac{18}{17}\right)$.

2) Ta có $M(0; 2; 2), N\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3}{2}; 2; 0\right), \overrightarrow{CM} = (0; -2; 2), \overrightarrow{AC} = (0; 4; 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}] = (4; -3; -3), [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}] \cdot \overrightarrow{AC} = -12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$d(AN, CM) = \frac{|[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}] \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}]\|} = \frac{12}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Góc giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$\cos(AN, CM) = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM}|}{AN \cdot CM} = \frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4 \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow (AN, CM) \approx 56^\circ$$

Bài 3.7.8. Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) , ta suy ra O là trọng tâm ΔABC . Gọi I là trung điểm của BC , ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Trong mp (ABC) , ta vẽ tia Oy vuông góc với OA . Đặt $SO = h$, chọn

hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được: $O(0; 0; 0), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right), S(0; 0; h)$

Suy ra $I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right)$.

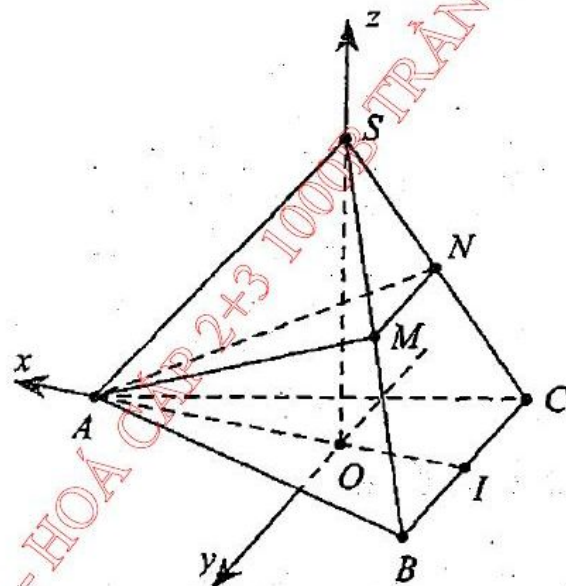
$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right), N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right).$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{5a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right), \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{5a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = (6h; 0; 5a\sqrt{3}) \text{ là VTPT của (AMN)}$$

$$[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \vec{n}_2 = (6h; 0; -a\sqrt{3}) \text{ là VTPT của (SBC)}$$

$$\text{Vì (AMN)} \perp \text{(SBC)} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$



$$1) \text{ Ta có } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

$$2) \text{ Ta có } \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{5a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{15}}{12}\right), \overrightarrow{BN} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{15}}{12}\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}] = \left(\frac{a^2\sqrt{15}}{12}; \frac{a^2\sqrt{15}}{8}; \frac{7a^2\sqrt{3}}{24}\right)$$

$$\Rightarrow [\overline{AM}, \overline{AN}] \cdot \overline{AB} = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{16} a^3$$

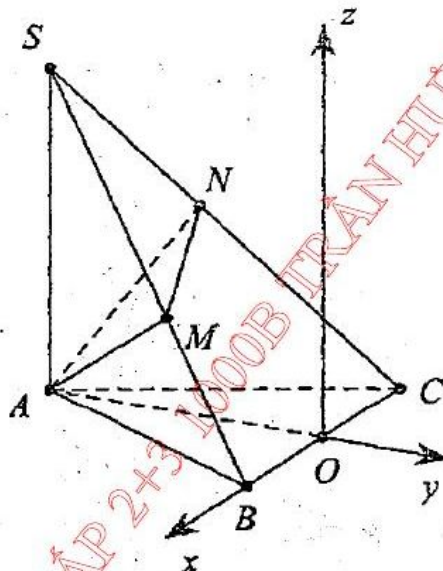
Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN là:

$$d(AM, BN) = \frac{[\overline{AM}, \overline{AN}] \cdot \overline{AB}}{[\overline{AM}, \overline{AN}]} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{15}}{\sqrt{39}} a$$

Góc giữa hai đường thẳng AM, BN là:

$$\cos(AM, BN) = \frac{|\overline{AM} \cdot \overline{BN}|}{|\overline{AM}| |\overline{BN}|} = \frac{3}{11} \Rightarrow (AM, BN) \approx 74^\circ$$

Bài 3.7.9. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ O là trung điểm cạnh BC.



1) Vì $\widehat{BAO} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 60^\circ$ nên

$$AO = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}, BO = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ đặt } SA = x, x > 0. \text{ Ta}$$

có tọa độ các điểm là:

$$A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; -\frac{a}{2}; x\right)$$

$$\text{Suy ra } \overline{SA} = (0; 0; -x), \overline{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \Rightarrow [\overline{SA}, \overline{AB}] = \left(-\frac{ax}{2}; \frac{ax\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

Nên $\overline{n}_1 = (1; -\sqrt{3}; 0)$ là VTPT của (SAB)

$$\overline{SB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; -x\right), \overline{BC} = (-a\sqrt{3}; 0; 0) \Rightarrow [\overline{SB}, \overline{BC}] = \left(0; ax\sqrt{3}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nên $\vec{n}_2 = (0; 2x; a)$ là VTPT của (SBC)

$$\text{Theo đề bài } \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|-2x\sqrt{3}|}{2 \cdot \sqrt{4x^2 + a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Do đó } S \left(0; -\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4} \right)$$

Vì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{48}.$$

Ta có: $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$ nên

$$V_{S.AMN} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3 \sqrt{6}}{48} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{192}.$$

$$2) \text{ Ta có } M \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{8} \right), N \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{8} \right)$$

$$\text{Suy ra } \vec{AN} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{8} \right), \vec{CM} = \left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{8} \right), \vec{AC} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$\text{Nên } [\vec{AN}, \vec{CM}] = \left(\frac{a^2 \sqrt{2}}{16}; \frac{a^2 \sqrt{6}}{8}; -\frac{a^2 \sqrt{3}}{8} \right) \Rightarrow [\vec{AN}, \vec{CM}] \cdot \vec{AC} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{32}$$

Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM là:

$$d(AN, CM) = \frac{[\vec{AN}, \vec{CM}] \cdot \vec{AC}}{\|[\vec{AN}, \vec{CM}]\|} = \frac{a\sqrt{57}}{38}.$$

Góc giữa hai đường thẳng AN và CM là:

$$\cos(\angle AN, CM) = \frac{|\vec{AN} \cdot \vec{CM}|}{\|\vec{AN}\| \cdot \|\vec{CM}\|} = \frac{7}{3\sqrt{57}} \Rightarrow (\angle AN, CM) \approx 72^\circ.$$

Bài 3.7.10. Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

Vì $MN \parallel BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$$B(0; 0; 0), A(2a; 0; 0), C(0; 2a; 0), S(2a; 0; x), M(a; 0; 0), N(a; a; 0)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BS} = (2a; 0; x), \overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = (-2ax; 0; 4a^2)$$

Do đó $\vec{n} = (x; 0; -2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

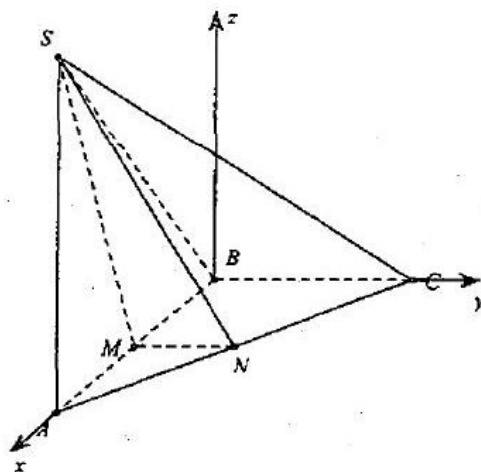
Từ đó suy ra thể tích khối chóp S.BMNC là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BMNC} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (2a; 0; 0), \overrightarrow{SN} = (-a; a; 2a\sqrt{3}), \overrightarrow{BN} = (a; a; 0)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}] = (0; -4\sqrt{3}a^2; 2a^2) \Rightarrow [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$$

$$\text{Vậy } d(AB, SN) = \frac{|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{BN}|}{\|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}]\|} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$



Bài 3.7.11. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

$S(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

1) Sử dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(ABC) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Mặt khác $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} = 1$

$\Rightarrow$ mp(P) luôn đi qua $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

2) Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp SABC có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0.$$

Thay tọa độ các điểm A, B, C, S vào ta có:

$$\begin{cases} a^2 - 2ma + q = 0 \\ b^2 - 2nb + q = 0 \\ c^2 - 2cp + q = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{a}{2}; n = \frac{b}{2} \\ p = \frac{c}{2}; q = 0 \end{cases}$$

Tâm của mặt cầu (S) là $I(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$ và bán kính $R = IS = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a^2 + \frac{27}{8a} + \frac{27}{8a} \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow a^2 + \frac{27}{4a} \geq \frac{27}{4}.$$

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự:

$$b^2 + \frac{27}{4b} \geq \frac{27}{4}; c^2 + \frac{27}{4c} \geq \frac{27}{4}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{27}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq \frac{81}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{27}{4} \Rightarrow R \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}$. Vậy $\min R = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3) Ta có thể tích của tứ diện SABC là: $V_{SABC} = \frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện:

$$S_{tp} = \frac{1}{2}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2})$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Ta có $ab + bc + ca = 2abc$.

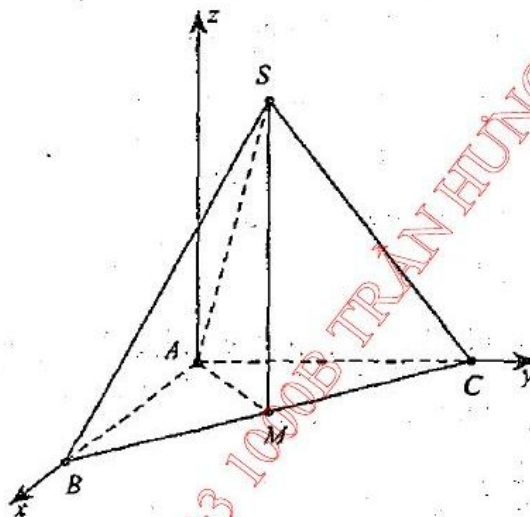
$$\text{Mà } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$$

$$\text{Nên suy ra } r \leq \frac{abc}{2abc + \frac{2}{\sqrt{3}}abc} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

Mặt khác: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 < (ab + bc + ca)^2 = (2abc)^2$

$$\Rightarrow r > \frac{abc}{4abc} = \frac{1}{4}.$$

Bài 3.7.12. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SM = m$



Ta có tọa độ các đỉnh là:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(0; b; 0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right), S\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; m\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; m\right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0), \text{ do đó } [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}] = (0; am; -\frac{ab}{2})$$

Nên ta có $\overrightarrow{n_1} = (0; 2m; -b)$ là VTPT của (SAB)

$$\overrightarrow{BC} = (-a; b; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{BC}] = (b^2; ab; 2am)$$

Vì (Q) đi qua BC và vuông góc với mặt phẳng (SAB) nên (Q) nhận véc tơ $\overrightarrow{n_1} = (b^2; ab; 2am)$ làm VTPT, nên phương trình

$$(Q): b^2x + aby + 2amz - ab^2 = 0.$$

$$\text{Phương trình SA: } \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = 2mt \end{cases} \Rightarrow D(at; bt; 2mt)$$

Mà $D \in (Q)$ nên ta có:

$$ab^2t + ab^2t + 4am^2t - ab^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b^2}{2b^2 + 4m^2}$$

$$1) \text{ Mặt khác } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(D, (ABC)) = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot 2mt = \frac{abmt}{3}$$

$$\text{Mà } V_{ABCD} = \frac{ab^2\sqrt{2}}{24} \text{ nên suy ra}$$

$$mt = \frac{b\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \frac{mb}{b^2 + 2m^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow 2m^2 - 2\sqrt{2}bm + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}m - b)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } SM = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$2) \text{ Ta có } m = \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{b^2}{2b^2 + 4m^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{a}{4}; \frac{b}{4}; \frac{b\sqrt{2}}{4}\right), S\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overline{SB} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \text{phương trình}$$

$$SB: \begin{cases} x = a + at \\ y = -bt \\ z = -b\sqrt{2}t \end{cases} \Rightarrow E(a + at; -tb; -b\sqrt{2}t)$$

Giả sử mặt cầu (S) đi qua A, B, C, D có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \varphi = 0$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} \varphi = 0 \\ a^2 - 2\alpha a = 0 \\ b^2 - 2\alpha b = 0 \\ a^2 + 3b^2 - 8\alpha a - 8\beta b - 8\gamma b\sqrt{2} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a}{2} \\ \beta = \frac{b}{2} \\ \gamma = -\frac{3a^2 + b^2}{8b\sqrt{2}} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nên (S): } x^2 + y^2 + z^2 - ax - by + \frac{3a^2 + b^2}{4b\sqrt{2}}z = 0$$

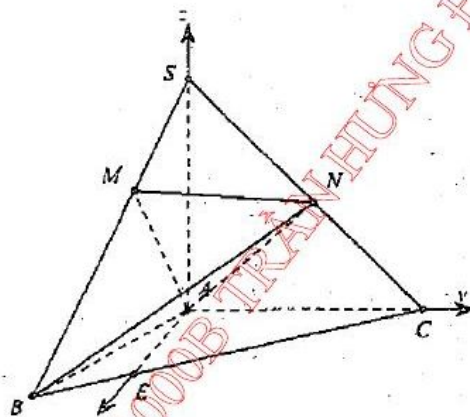
Do đó

$$E \in (S) \Leftrightarrow (a+at)^2 + 3b^2t^2 - a(a+at) - b(-bt) + \frac{3a^2+b^2}{4b\sqrt{2}}(-b\sqrt{2}t) = 0$$

$$\Leftrightarrow at(a+at) + 3b^2t^2 + b^2t - \frac{3a^2+b^2}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a^2-b^2}{2(a^2+3b^2)}$$

$$\text{Vậy } E \left(\frac{(3a^2+5b^2)a}{2(a^2+3b^2)}; -\frac{(a^2-b^2)b}{2(a^2+3b^2)}; -\frac{(a^2-b^2)b\sqrt{2}}{2(a^2+3b^2)} \right)$$

Bài 3.7.13. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SA = m$



Ta có tọa độ các đỉnh là: $A(0; 0; 0)$, $C(0; 2a; 0)$, $S(0; 0; m)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{5a}{2}; 0\right), \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; m\right)$$

$$\text{Nên } [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(\frac{5am}{4}; \frac{am\sqrt{3}}{4}; a^2\sqrt{3}\right), \text{ suy ra } \vec{n} = (5m; m\sqrt{3}; 4a\sqrt{3}) \text{ là}$$

VTPT của mặt phẳng (SBC). Và $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC).

Theo giả thiết đề bài, ta suy ra:

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{25m^2 + 48a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{Vì } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ nên ta có:}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{21}}{7}$$

- 2) Ta có tứ giác BCNM nội tiếp khi và chỉ khi A, B, C, N, M nằm trên một mặt cầu.

$$\text{Vì } \overrightarrow{SM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SB} \Rightarrow M \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{6}; \frac{4a\sqrt{7}}{7} \right);$$

$$\overrightarrow{SN} = k \overrightarrow{SC} \Rightarrow N(0; 2ak; (1-k)m).$$

Giả sử phương trình mặt cầu (S) đi qua A, B, C, M có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - a\sqrt{3}\alpha + a\beta = 0 \\ 4a^2 - 4a\beta = 0 \\ \frac{151}{63}a^2 - \frac{a\sqrt{3}\alpha}{3} + \frac{a\beta}{3} - \frac{8a\sqrt{7}\gamma}{7} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được: $\alpha = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \beta = a, \gamma = \frac{65a\sqrt{7}}{252}$

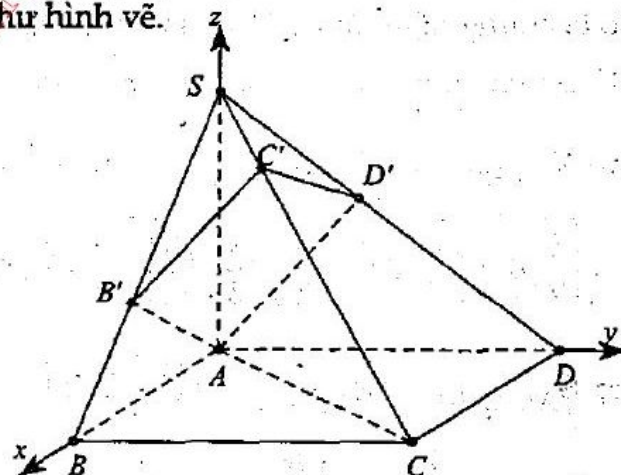
Suy ra phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4a\sqrt{3}}{3}x - 2ay - \frac{65a\sqrt{7}}{126}z = 0.$

Do đó $N \in (S) \Leftrightarrow 4a^2k^2 + (1-k)^2m^2 - 4a^2k - \frac{65a\sqrt{7}}{126}(1-k)m = 0$

$$\Leftrightarrow 192k^2 - 235k + 43 = 0 \Leftrightarrow k = 1, k = \frac{43}{192}.$$

Do $0 < k < 1$ nên ta có $k = \frac{43}{192}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.7.14. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB = 1$ và đặt $SA = m$.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Tọa độ các đỉnh là: $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), S(0; 0; m).$

Suy ra $\overrightarrow{SC} = (1; 1; -m)$ nên phương trình $(\beta): x + y - mz = 0.$

$$\overrightarrow{SB} = (1; 0; -m), \text{ phương trình SB: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -mt \end{cases} \Rightarrow B'(1 + t; 0; -mt)$$

$$\text{Mà } B' \in (\beta) \text{ nên } 1 + t + m^2 t = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{m^2 + 1}.$$

$$\text{Do đó } B' \left(\frac{m^2}{m^2 + 1}; 0; \frac{m}{m^2 + 1} \right)$$

$$\text{Tương tự: } D' \left(0; \frac{m^2}{m^2 + 1}; \frac{m}{m^2 + 1} \right), C' \left(\frac{m^2}{m^2 + 2}; \frac{m^2}{m^2 + 2}; \frac{2m}{m^2 + 2} \right).$$

$$\text{Xét đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}, \text{ ta có } \Delta \text{ là đường thẳng cố định và}$$

$$\Delta \in (\beta).$$

Giả sử mặt cầu (S) đi qua A, B, D, B' có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ 1 - 2b = 0 \\ \frac{m^2}{m^2 + 1} - \frac{2m^2 a}{m^2 + 1} - 2c \frac{m}{m^2 + 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra (S): } x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0.$$

Từ đó ta chứng minh được C, C', D' cùng nằm trên (S). Ta có đpcm.

2) Vì SC tạo với đáy một góc 60° nên $m = \sqrt{6}$.

$$\text{Khi đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{6}{7}; 0; \frac{\sqrt{6}}{7} \right), \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4} \right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] = \left(-\frac{3\sqrt{6}}{28}; -\frac{3\sqrt{6}}{28}; \frac{9}{14} \right)$$

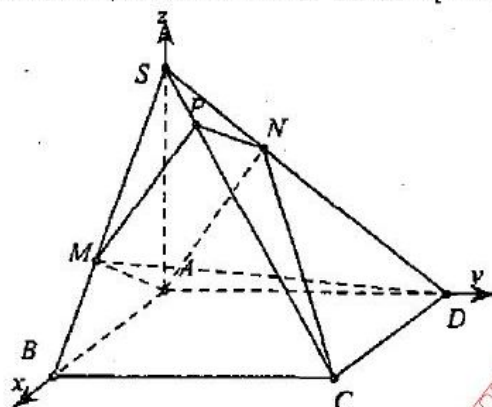
$$\text{Suy ra } S_{AB'C'D'} = 2S_{\Delta AB'C'} = \left\| [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] \right\| = \frac{3\sqrt{3}}{7},$$

$$d(S, (\beta)) = \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó } V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3} d(S, (\beta)) \cdot S_{AB'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7} = \frac{3\sqrt{6}}{14}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.AB'C'D'}} = \frac{14}{9}.$$

Bài 3.7.15.1) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm



$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;2a;0), S(0;0;3a)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SB} = (a;0;-3a), \overrightarrow{SD} = (0;2a;-3a), \overrightarrow{SC} = (a;2a;-3a)$$

$$\text{Phương trình SB: } \begin{cases} x = a+t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases} \Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+t;0;-3t)$$

$$\text{Mà } AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow (a+t) + 9t = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10}; 0; \frac{3a}{10}\right)$$

$$\text{Tương tự vậy ta tìm được } N\left(0; \frac{18a}{13}; \frac{12a}{13}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = -\frac{27a^2}{65} (1; 2; -3)$$

$$\text{Do đó ta có phương trình của } (AMN): x + 2y - 3z = 0$$

$$\text{Phương trình SC: } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \end{cases} \quad \text{nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9a}{14}, y = \frac{9a}{7}, z = \frac{15a}{14} \Rightarrow P\left(\frac{9a}{14}; \frac{9a}{7}; \frac{15a}{14}\right).$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}] = -\frac{27a^2}{70}(1; 2; -3), \quad [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}] = \frac{27a^2}{91}(1; 2; -3)$$

$$\text{Suy ra } S_{AMPN} = \frac{1}{2} \left(\left\| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}] \right\| + \left\| [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}] \right\| \right) = \frac{621\sqrt{14}a^2}{1820} \text{ và}$$

$$d(S, (AMN)) = \frac{9a}{\sqrt{14}}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMPN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{621\sqrt{14}a^2}{1820} = \frac{1863a^3}{1820}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } \overrightarrow{CN} &= \left(-a; -\frac{8a}{13}; \frac{12a}{13} \right), \quad \overrightarrow{DM} = \left(\frac{9a}{10}; -2a; \frac{3a}{10} \right), \quad \overrightarrow{CD} = (-a; 0; 0) \\ \Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}] &= \left(\frac{348a^2}{65}; \frac{147a^2}{130}; \frac{426a^2}{65} \right) \Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}] \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{348a^3}{65} \end{aligned}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng CN, DM là:

$$d(CN, DM) = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}]|}{\|[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}]\|} = \frac{2332a}{3\sqrt{15209}}$$

$$\text{Và } \cos(CN, DM) = \frac{|\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{DM}|}{\| \overrightarrow{CN} \| \| \overrightarrow{DM} \|} = \frac{133}{\sqrt{154570}}$$

Bài 3.7.16. Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy nên

$SI \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đặt $SI = x, x > 0$. Ta có tọa độ các điểm là:

$$I(0; 0; 0), A(-a; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(-a; 2a; 0), S(0; 0; x)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SC} = (a; a; -x), \overrightarrow{CD} = (-2a; a; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}] = (ax; 2ax; 3a^2)$$

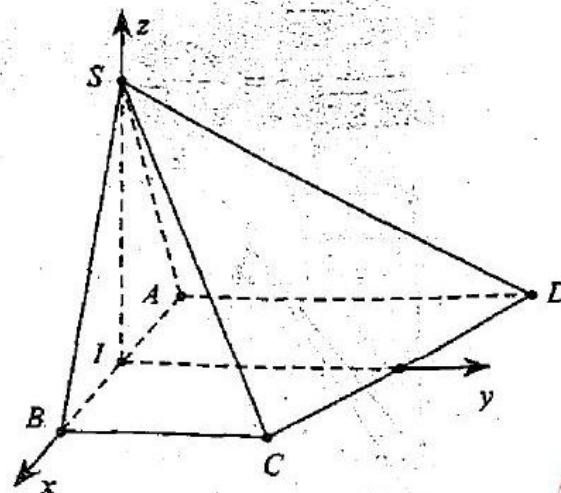
Nên $\vec{n}_1 = (x; 2x; 3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD).

Mà $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{k}\|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{AB(BC + AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$



Bài 3.7.17. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), C(a; a; 0), M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right)$ nên phương trình

$$DM: \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(t; a - 2t; 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (t - a; -2t; 0), \overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Vì } H \in CN \Rightarrow \frac{t - a}{-a} = \frac{-2t}{-\frac{a}{2}} \Leftrightarrow -t + a = 4t \Rightarrow t = \frac{a}{5}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; a\sqrt{3}\right)$$

$$\text{Vì } S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle BCM} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

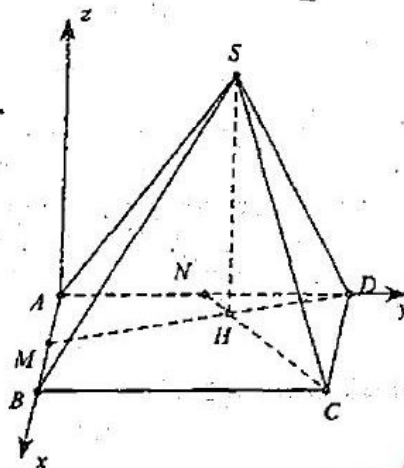
Nên thể tích khối chóp S.CDNM:

$$V = \frac{1}{3} S H S_{CDNM} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$$

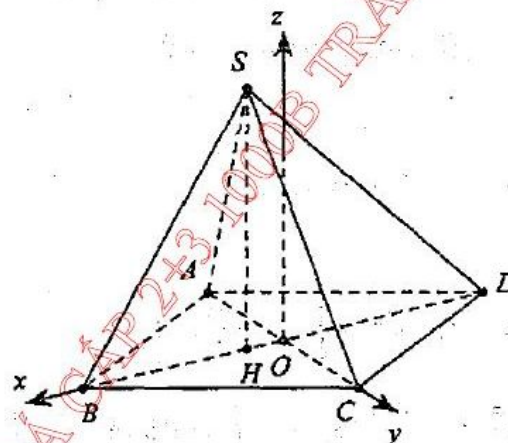
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SC} = \left(\frac{4a}{5}; \frac{2a}{5}; -a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] = \left(a^2\sqrt{3}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; a^2\right)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC} = a^3\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, DM) = \frac{|\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}|} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{\frac{a^2 \sqrt{19}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$$



Bài 3.7.18. Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu H của S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $H \in BD$. Chọn hệ trục như hình vẽ



Giả sử $B(b; 0; 0), C(0; c; 0)$ với $b, c > 0$. Khi đó $A(0; -c; 0), D(-b; 0; 0)$

và $b^2 + c^2 = 1$

Gọi $H(h; 0; 0)$, ta có:

$$HB^2 = HA^2 \Rightarrow (h - b)^2 = h^2 + c^2 \Rightarrow h = \frac{b^2 - c^2}{2b} = \frac{2b^2 - 1}{2b}$$

$$\text{Ta có: } SH^2 = SA^2 - AH^2 = 1 - \frac{1}{4b^2} = \frac{4b^2 - 1}{4b^2} \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{4b^2 - 1}}{2b}, b > \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } S\left(\frac{b^2 - c^2}{2b}; 0; \frac{\sqrt{4b^2 - 1}}{2b}\right)$$

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên ta có $S_{ABCD} = 4S_{\triangle ABO}$, do vậy

$$V_{S.ABCD} = 4V_{SABO} = 4 \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OS} \right| = \frac{2}{3} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OS} \right|$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OA} = (0; -c; 0), \overrightarrow{OB} = (b; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; 0; bc)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} c \sqrt{4b^2 - 1}$$

$$\text{Nên } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} c \sqrt{4b^2 - 1} = \frac{1}{6} \sqrt{4c^2(4b^2 - 1)}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: } \sqrt{4c^2(4b^2 - 1)} \leq \frac{4c^2 + 4b^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + b^2 = 1 \\ 4c^2 = 4b^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{10}}{4} \\ c = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } SD^2 = \left(\frac{b^2 - c^2}{2b} + b \right)^2 + \frac{4b^2 - 1}{4b^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow SD = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } \max V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} \text{ đạt được khi } SD = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm.}$$

Bài 3.7.19. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, gốc tọa độ là trung điểm của AD, trục Ox là trục đối xứng của hình thang ABCD, trục Oz // SA.

Tọa độ các điểm là:

$$A(0; -a; 0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right), D(0; a; 0), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), S(0; -a; a\sqrt{3}).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{MS} = -3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ID} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{IS} \text{ nên}$$

$$M\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; -\frac{5a}{8}; \frac{\sqrt{3}a}{4}\right), I\left(0; -\frac{a}{7}; \frac{4\sqrt{3}a}{7}\right).$$

$$1) \text{ Ta có: } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; \frac{3a}{8}; \frac{2\sqrt{3}a}{8}\right), \overrightarrow{AI} = \left(0; \frac{6a}{7}; \frac{4\sqrt{3}a}{7}\right)$$

$$\text{Nên mặt phẳng (AMI) có phương trình } 2y - \sqrt{3}z + 2a = 0.$$

$$\text{Trung điểm của SC là } N\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \text{ thuộc mặt phẳng (AMI).}$$

Vậy mặt phẳng (AMI) cắt SC tại trung điểm của SC.

$$2) \text{ Ta có } \overrightarrow{SD}(0; 2a; -a\sqrt{3}), \vec{n}_{(AMI)}(0; 2; -\sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = a \cdot \vec{n}_{(AMI)} \text{ nên}$$

$SD \perp (AMI)$.

Vì $\overrightarrow{IM} \left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; -\frac{27a}{56}; -\frac{9\sqrt{3}a}{28} \right)$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$, hay $\widehat{AMI} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{ANI} = 90^\circ$.

Vậy các điểm tứ giác AMNI nội tiếp trong đường tròn đường kính AI.

3) Khoảng cách cần tìm là: $d(O, (AMI)) = \frac{|2a|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a$.

Bài 3.7.20. Ngoại tiếp tứ diện đều ABCD bằng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Tọa độ các điểm

$A(\sqrt{2}; 0; 0), B(0; \sqrt{2}; 0), C(0; 0; \sqrt{2}), D(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}), S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \overrightarrow{SB} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$

$\overrightarrow{SC} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \overrightarrow{SD} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

Gọi $\vec{e} = (x; y; z)$ là véc tơ đơn vị của đường thẳng Δ . Khi đó:

$SA' = |\vec{e} \cdot \overrightarrow{SA}|, SB' = |\vec{e} \cdot \overrightarrow{SB}|, SC' = |\vec{e} \cdot \overrightarrow{SC}|, SD' = |\vec{e} \cdot \overrightarrow{SD}|$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên

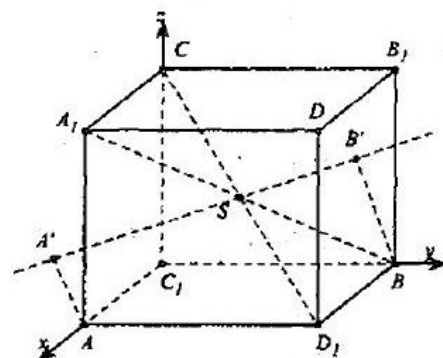
$$\begin{aligned} 4P &= 4(SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4) \\ &= (-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4 \\ &= 4 + 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \leq 4 + \frac{16}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 \end{aligned}$$

Hay $P \leq \frac{7}{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max P = \frac{7}{3}$ đạt được khi Δ là các đường thẳng đi qua các đỉnh của tứ diện đều ABCD.



MỤC LỤC

Chương 1: Khối đa diện - thể tích khối đa diện

Chuyên đề 1: Thể tích khối chóp	5
Phương pháp giải và các ví dụ minh họa	5
Bài tập vận dụng	27
Chuyên đề 2: Thể tích khối lăng trụ	44
Phương pháp giải	44
Các ví dụ minh họa	44
Bài tập vận dụng	54

Chương 2: Mặt tròn xoay - mặt cầu

Chuyên đề 1: Diện tích xung quanh, thể tích và thiết diện của khối nón, khối trụ	86
Phương pháp giải	86
Các ví dụ minh họa	86
Bài tập vận dụng	93
Chuyên đề 2: Chứng minh hệ điểm thuộc nón, mặt trụ	99
Phương pháp giải	99
Các ví dụ minh họa	100
Bài tập vận dụng	102
Chuyên đề 3: Chứng minh hệ điểm nằm trên mặt cầu	103
Phương pháp giải	103
Các ví dụ minh họa	103
Bài tập vận dụng	107
Chuyên đề 4: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và hình lăng trụ	111
Phương pháp giải	111
Các ví dụ minh họa	112
Bài tập vận dụng	122
Chuyên đề 5: Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng	129
Phương pháp giải	129
Các ví dụ minh họa	130
Bài tập vận dụng	136

Chương 3: Phương pháp tọa độ trong không gian

Chuyên đề 1: Xác định tọa độ của điểm, tọa độ vec tơ	141
Phương pháp giải	141
Các ví dụ minh họa	141
Bài tập vận dụng	147
Chuyên đề 2: Ứng dụng tích có hướng	152
Phương pháp giải	152
Các ví dụ minh họa	152
Bài tập vận dụng	159
Chuyên đề 3: Lập phương trình mặt phẳng	167
Phương pháp giải	167
Các ví dụ minh họa	168
Bài tập vận dụng	185
Chuyên đề 4: Phương trình đường thẳng	203
Phương pháp giải	203
Các ví dụ minh họa	204
Bài tập vận dụng	228
Chuyên đề 5: Phương trình mặt cầu	256
Phương pháp giải	256
Các ví dụ minh họa	256
Bài tập vận dụng	265
Chuyên đề 6: Cực trị trong không gian	276
Phương pháp giải	276
Các ví dụ minh họa	276
Bài tập vận dụng	291
Chuyên đề 7: Giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ	300
Phương pháp giải	300
Các ví dụ minh họa	303
Bài tập vận dụng	319

Công ti TNHH AN PHA VN

50 Nguyễn Văn Săng
P.TSN, Q.Tân Phú
ĐT: 08.62676463

SÁCH CÓ BÁN TẠI

Tp. Hà Nội:

Công ti TNHH Trình Dâu

98 Lê Thanh Nghị

ĐT: 04.38680092

Công ti TNHH Quảng Lợi

3 Hàng Tre. ĐT: 04.38246605

Công ti TNHH Việt Kim Long

393 Vĩnh Hưng, Q. Hoàng Mai

ĐT: 04.36462755

Nhà sách Bình Thủy

67 Nguyễn Khoái, Q.HBT

ĐT: 04.39845439

Nhà sách Ngọc Hòa

54B Bà Triệu, Q.HK

ĐT: 04.38258410

Nhà sách Dương Nguyệt

42E Lý Thường Kiệt, Q.HK

ĐT: 04.39345635

Tp. Đà Nẵng

Công ti TNHH Bốn Phương

4 Lý Thái Tổ. ĐT: 3646596

Nhà sách Lam Châu

129 Phan Chu Trinh

ĐT: 0511.3821317

Tp. Long Xuyên

Thư quán Long Xuyên

3/5 Tôn Đức Thắng.

ĐT: 0913.797.350

Tp. Hồ Chí Minh:

Trung tâm Sách Giáo dục

Anpha. 225C Ng. Tri Phương,

P.9, Q.5. ĐT: 08.38547464

Công ti TNHH S-TBGD Đức Trí

10A - 10B Đinh Tiên Hoàng,

Q.1. ĐT: 08.38228300

Trung tâm Sách Sài Gòn

474 Nguyễn Thị Minh Khai, Q3

ĐT: 08.38355907

Nhà sách 142 Trần Huy Liệu

ĐT: 08.38458295

Davibooks.vn (NS trực tuyến)

Và hệ thống các siêu thị sách
của công ti **Phương Nam,**
Fahasa, Gia Lai CTC... trên